Solución de una clase simple de problemas de frontera usando diferencias finitas

Requisitos. Ejemplos de problemas de frontera para EDO de segundo orden, aproximación de derivadas por medio de diferencias finitas, matrices dispersas (esparcidas, ralas), solución de sistemas de ecuaciones lineales con matrices tridiagonales.

1. Una clase simple de problemas de frontera. Consideremos problemas de la forma

$$X''(t) = F(t), \qquad X(0) = X(1) = 0,$$

donde F es una función dada y X es la función incógnita.

2. Fórmula simple para aproximar la segunda derivada (repaso). Supongamos que X es una función bastante suave y escribamos su expansión de Taylor alrededor de un punto general t, denotando por h el incremento del argumento. Usamos la fórmula de Taylor con términos exactos hasta h^3 y con un término residuo de la forma $O(h^4)$:

$$X(t+h) = X(t) + X'(t)h + \frac{\square}{2} + \frac{\square}{6} + O(h^4). \tag{1}$$

Escribamos un análogo de (1) con $-h$ en vez de h:

$$X(t-h) = X(t) - X'(t)h + \qquad\qquad\qquad\qquad + O(h^4). \tag{2}$$

Sumamos las identidades (1) y (2). Los términos con las potencias impares de h desaparecen, la suma $O(h^4) + O(h^4)$ es de clase $O(h^4)$, y obtenemos la siguiente fórmula:

$$X(t+h) + X(t-h) = \square\, x(t) + \square + O(h^4).$$

Despejamos $X''(t)$ usando la regla $O(h^4)/h^2 = O(h^2)$:

$$X''(t) = \frac{\square}{\square} + O(h^2).$$

Factorizamos el signo del numerador:

$$X''(t) = -\frac{-X(t-h) + \square}{\square} + O(h^2). \tag{3}$$

3. Pasamos de las funciones a los vectores de sus valores en una malla uniforme. Sea n un número entero positivo. Dividimos el intervalo cerrado $[0,1]$ en n partes iguales y denotemos por $t_0, \ldots, t_n$ a los *nodos* correspondientes:

$$t_0 = \frac{0}{n} = 0, \quad t_1 = \frac{\boxed{}}{n}, \quad t_2 = \frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad t_k = \frac{\boxed{}}{n}, \quad \ldots, \quad t_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Denotemos por x_k al valor de la función incógnita X en el punto t_k, y por f_k al valor de la función dada F en el punto t_k:

$$x_k = X(t_k) = X\left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\right), \qquad f_k = F(\boxed{}) = F\left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\right).$$

En vez de buscar la función $\boxed{}$, vamos a buscar el vector $\left[\boxed{}\right]_{k=0}^{n}$ de sus valores en los puntos t_k. Las condiciones de frontera $X(0) = X(1) = 0$ significan que las siguientes componentes del vector x son cero:

$$\boxed{} = 0, \qquad \boxed{} = 0. \tag{4}$$

Ahora vamos a sustituir la ecuación diferencial $X''(t) = F(t)$ por su análogo discreto. Notamos que si $t = t_k$ y $h = 1/n$, entonces

$$t + h = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \underbrace{\boxed{}}_{t_{???}}, \qquad t - h = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \underbrace{\boxed{}}_{t_{???}}.$$

Para cualquier k en $\{1, \ldots, n-1\}$, aproximamos $X''(t_k)$ por la fórmula (3):

$$X''(t_k) = -\frac{-x_{k-1} + \boxed{}}{1/n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{5}$$

Consideremos la ecuación $X''(t) = F(t)$ solamente en los puntos t_k, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, y reemplazamos $X''(t_k)$ por su aproximación (5), omitiendo el término residuo. Por supuesto, la ecuación nueva no coincide de manera exacta con la ecuación original:

$$-\frac{-x_{k-1} + \boxed{}}{1/n^2} = \underbrace{\boxed{}}_{f_{???}}.$$

Multiplicamos ambos lados por $-1/n^2$:

$$-x_{k-1} + \boxed{} = -\frac{1}{n^2}\boxed{} \qquad (k \in \{\boxed{}, \ldots, \boxed{}\}). \tag{6}$$

Del Problema 1 hemos pasado a un sistema de ecuaciones (6) y (4). Se puede demostrar (no lo vamos a hacer) que el nuevo sistema de ecuaciones tiene una única solución. Notamos que el vector $x = \left[x_0, \ldots, x_n\right]^\top$ **no coincide exactamente** con los valores de la solución X del Problema 1 en los puntos t_k.

4. El sistema de ecuaciones en la forma matricial. Por simplicidad, consideremos el caso $n = 6$. Escribimos la ecuación (6) para $k = 2$:

$$-x_1 + \boxed{} = -\frac{1}{36}\boxed{}.$$

De manera similar se escriben las ecuaciones para $k = 3$ y $k = 4$. Los casos extremos $k = 1$ y $k = 5$ son especiales. Escribimos la ecuación (6) para $k = 1$:

$$-x_0 + \boxed{} = -\frac{1}{36}\boxed{}.$$

Usando una de las condiciones (4) omitimos el sumando $-x_0$ y obtenemos una ecuación con x_1 y x_2:

$$\boxed{} = -\frac{1}{36}\boxed{}.$$

Escribimos la ecuación (6) para $k = 5$:

$$\boxed{} = -\frac{1}{36}\boxed{}.$$

Usando la segunda de las condiciones (4) omitimos uno de los sumandos y obtenemos una ecuación con x_4 y x_5:

$$\boxed{} = -\frac{1}{36}\boxed{}.$$

Escribamos juntas todas las 5 ecuaciones ($k = 1, 2, 3, 4, 5$):

$$\begin{aligned}
\boxed{}x_1 \boxed{}x_2 & & & & = -\frac{1}{36}\boxed{},\\
\boxed{}x_1 \boxed{}x_2 \boxed{}x_3 & & & & = -\frac{1}{36}\boxed{},\\
\boxed{}x_2 \boxed{}x_3 \boxed{}x_4 & & & & = -\frac{1}{36}\boxed{},\\
\boxed{}x_3 \boxed{}x_4 \boxed{}x_5 & & & & = -\frac{1}{36}\boxed{},\\
\boxed{}x_4 \boxed{}x_5 & & & & = -\frac{1}{36}\boxed{}.
\end{aligned}$$

Ahora representamos el mismo sistema en la forma matricial: $Tx = b$, donde

$$T = \begin{bmatrix} \; & \; & 0 & 0 & 0 \\ \; & \; & \; & 0 & 0 \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \end{bmatrix}, \qquad b = -\frac{1}{36}\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}.$$

La matriz T es una matriz de Toeplitz tridiagonal.

5. Construcción de matrices de banda en Matlab con el comando spdiags. La siguiente matriz A tiene tres diagonales, las cuales se pueden guardar juntas formando una matriz D (hemos puesto 99 en los lugares que no se toman en cuenta):

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 0 \\ 0 & 32 & 33 & 34 \\ 0 & 0 & 43 & 44 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 21 & 11 & 99 \\ 32 & 22 & 12 \\ 43 & 33 & 23 \\ 99 & 44 & 34 \end{bmatrix}.$$

Estas tres diagonales en Matlab se numeran como $-1, 0, 1$. Construimos la matriz D y la matriz A en el formato de matriz disperza, luego observamos A en la forma completa:

```
D = [21, 11, 99; 32, 22, 12; 43, 33, 23; 99, 44, 34]
A = spdiags(D, -1 : 1, 4, 4)
full(A)
```

6. Construcción de la matriz T en el formato de matriz dispersa.

```
D = repmat([-1, 2, -1], ???, ???)
T = spdiags(D, -1 : 1, ???, ???)
disp(full(T))
```

7. Solución de una clase especial de problemas de frontera con el método de diferencias finitas. En la siguiente función se supone que `f` es un apuntador a una función.

```
function [t, x] = solvebvpsimpleviafindif(f, n),
   D = repmat([???, ???, ???], ???, ???);
   T = spdiags(???, ???, ???, ???);
   t = (1 : ???)' / ???;
   b = - f(t) / ???;
   x = T \ b;
   t = [0; t; 1];
   x = [0; x; 0];
end
```

Los últimos dos operadores sirven para resolver el sistema (con algún método que elige Matlab o GNU Octave) y completar la solución con los valores nulos en la frontera.

8. Pruebas. La prueba se puede agregar a la función que hace pruebas de otros métodos.

```
function [] = testsolvesimplebvp(n),
   f1 = @(t) exp(t); # se puede usar otro ejemplo
   x1 = @(t) ???; # la solucion exacta
   [t, x] = solvesimplebvpviafindif(f1, n);
   xexact = x1(t);
   disp(norm(x - xexact, inf));
end
```