Solución de una clase simple de problemas de frontera usando la función de Green

Requisitos. Ejemplos de problemas de frontera para EDO de segundo orden, la función de Green para una clase especial de problemas de frontera en $[0, 1]$, integración numérica.

1. Ejemplo. Antes de programar la solución del problema, se recomienda elegir un ejemplo para hacer comprobaciones. Un ejemplo posible:

$$x''(t) = e^t, \qquad x(0) = 0, \qquad x(1) = 0.$$

Resolver este ejemplo a mano buscando la solución en forma $x(t) = e^t + C_1 t + C_2$.

$$C_1 = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad C_2 = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad x(t) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

2. Fórmula integral con la función de Green. Programar la solución de problemas de frontera de la forma

$$x''(t) = f(t), \qquad x(0) = 0, \qquad x(1) = 0, \tag{1}$$

usando la fórmula

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s)\, ds, \tag{2}$$

donde

$$G(t, s) = \begin{cases} (t-1)s, & 0 \le s \le t \le 1, \\ (s-t)t, & 0 \le t \le s \le 1, \end{cases} = \max\{(t-1)s, (s-1)t\} \quad (0 \le t, s \le 1). \tag{3}$$

Calcule a mano los valores de G en los puntos de la forma $(j/n, k/n)$, con $n = 3$:

	$s = 0/3$	$s = 1/3$	$s = 2/3$	$s = 3/3$
$t = 0/3$				
$t = 1/3$				
$t = 2/3$				
$t = 3/3$				

3. El producto diádico y otros elementos de la sintaxis de Matlab/Octave (repaso). Se recomienda ejecutar los siguientes comandos en el intérprete:

```
t = [11; 12; 13]
s = [5, 7]
t * s
```

Denotemos por t al vector columna que guarda los valores de j/n, y por s al vector renglón que guarda los valores de k/n. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces

$$t = \begin{bmatrix} 0/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 3/3 \end{bmatrix}, \qquad s = \begin{bmatrix} 0/3 & 1/3 & 2/3 & 3/3 \end{bmatrix}.$$

Obviamente el renglón s se obtiene de la columna t con una operación muy simple. Se recomienda repasar algunos elementos de la sintaxis de Matlab:

```
s = (0 : 3) / 3
s = linspace(0, 1, 4) / 3
t = s'
t - ones(4, 1)
t * s
repmat([11, 12, 13], 5, 1)
A = [11, 12, 13; 5, 6, 7]
sum(A, 2)
```

4. Cálculo de los valores de la función de Green. Programemos una función que calcule los valores de la función G en los pares de la forma $G(t_j, s_k)$, donde

$$t_j = \frac{j-1}{n}, \qquad s_k = \frac{k-1}{n} \qquad (j, k \in \{1, \ldots, n+1\}),$$

y n es un número dado.

```
function [G] = Greenvalues(n),
   s = ???; t = ???;
   G1 = (t - ones(???, 1)) * s;
   G2 = ???;
   G = max(G1, G2);
end
```

Por supuesto, lo mismo se puede escribir de manera más breve:

```
s = ???; t = ???;
G = max((t - ones(???, 1)) * s, ???);
```

5. Dos métodos muy elementales de integración numérica (repaso). Dada una función continua u en $[0,1]$, podemos aproximar su integral mediante las siguientes fórmulas. Denotemos por $s = [s_k]_{k=1}^{n+1}$ el arreglo de los puntos $0/n, 1/n, \ldots, n/n$:

$$s_1 = \frac{0}{n}, \quad s_2 = \frac{\qquad}{n}, \quad \ldots, \quad s_k = \frac{\qquad}{n}, \quad \ldots, \quad s_{n+1} = \frac{\qquad}{n}.$$

Integración numérica con los rectángulos derechos:

$$I = \int\limits_0^1 u(s)\,ds \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=???}^{???} u(s_k) = \texttt{sum(u(s(??? : ???))) / n.}$$

Integración numérica con el método de los trapecios:

$$I \approx \frac{1}{2n}\left(u\left(\frac{0}{n}\right) + u\left(\frac{n}{n}\right) + 2\sum_{k=1}^{n-1} u\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n}\left(u(s_{???}) + u(s_{???}) + 2\sum_{k=???}^{???} u(s_k)\right).$$

6. Tabla de valores del producto $G(t,s)f(s)$. Sea $n = 3$. Escriba las expresiones $G(t_j, s_k)f(s_k)$, para $j, k \in \{1, \ldots, n+1\}$:

		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
		$s_1 = 0/3$	$s_2 =$	$s_3 =$	$s_4 =$
$j=1$	$t_1 = 0/3$	$G(t_1,s_1)f(s_1)$	$G(t_1,s_2)f(s_2)$		
$j=2$	$t_2 =$				
$j=3$	$t_2 =$				
$j=4$	$t_2 =$				

Si están definidas las funciones G y f, entonces podemos formar la matriz de los valores de G como antes, y la matriz de los valores de f, que luego calcular el producto de dos matrices entrada por entrada:

$$\begin{bmatrix} f(\quad) & f(\quad) & f(\quad) & f(\quad) \\ f(\quad) & f(\quad) & f(\quad) & f(\quad) \\ f(\quad) & f(\quad) & f(\quad) & f(\quad) \\ f(\quad) & f(\quad) & f(\quad) & f(\quad) \end{bmatrix}.$$

```
f1 = @exp; s = linspace(???, ???, 4) / ???;
Gmatrix = Greenvalues(???); fmatrix = repmat(f1(???), ???, ???);
Gfmatrix = Gmatrix .* fmatrix;
```

Después de formar la matriz de los valores $G(t_j, s_k)f(s_k)$, falta solamente aplicar la integración numérica a lo largo de cada renglón.

7. Solución de una clase simple de problemas de frontera usando la fórmula integral con la función de Green. En el siguiente esquema se utiliza la integración con rectángulos derechos y se incluye el código que calcula los valores de la función de Green.

```
function [t, x] = solvesimplebvpviagreen(f, n),
   t = ???;
   s = ???;
   Gmatrix = max(???, ???);
   fmatrix = repmat(f(???), ???, ???);
   Gfmatrix = Gmatrix .* fmatrix;
   x = sum(Gfmatrix(:, ??? : ???), 2) / ???;
end
```

8. Pruebas.

```
function [] = testsolvesimplebvp(n),
   f1 = @(t) exp(t); # se puede usar otro ejemplo
   x1 = @(t) ???; # la solucion exacta
   [t, x] = solvesimplebvpviagreen(f1, n);
   xexact = x1(t);
   disp(norm(x - xexact, inf));
end
```

Se recomienda hacer pruebas para varios valores de n, por ejemplo, $n = 16$, $n = 32$, $n = 64$, etc., observar cómo se cambia el error máximo y determinar el orden del error. También se puede medir el tiempo de ejecución.

9. Realizar la misma idea con otros métodos de integración numérica. En vez del método de rectángulos derechos, realizar algún otro método dentro de la función `solvesimplebvpviagreen`, por ejemplo, el método de los trapecios o el método de Simpson. Determinar el orden del error en este caso. En las fórmulas de integración numérica se puede tomar en cuenta que $G(t, 0) = G(t, 1) = 0$ para cada t en $[0, 1]$.