Programación: solución exacta de la ecuación de calor sobre un intervalo con una condición inicial trigonométrica

Objetivos. Programar el cálculo de una función de dos argumentos que satisface la ecuación de calor en el intervalo $[0, 1]$ con una condición inicial trigonométrica. Luego podremos usar este ejemplo para comprobar varios métodos numéricos.

1. Solución exacta de la ecuación de calor con una condición inicial trigonométrica (sin deducción). Sea q un parámetro entero positivo. Entonces la función

$$u(x, t) = \operatorname{sen}(q\pi x)\, e^{-q^2\pi^2 t} \tag{1}$$

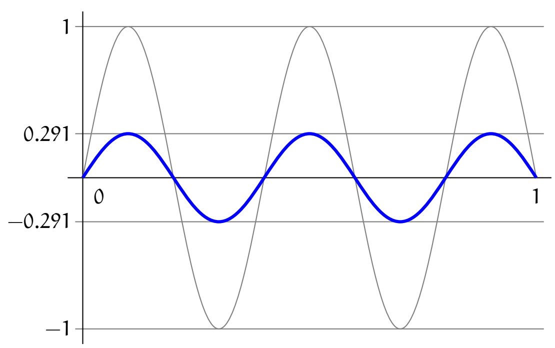
satisface la ecuación

$$(D_2 u)(x, t) = (D_1^2 u)(x, t)$$

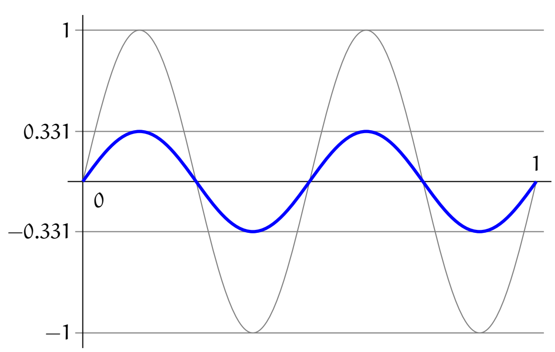
con las condiciones de frontera $u(0, t) = u(1, t) = 0$ y la condición inicial

$$u(x, 0) = \operatorname{sen}(q\pi x). \tag{2}$$

Por ejemplo, si $q = 5$ y $t = 0.005$, entonces $e^{-q^2\pi^2 t} \approx 0.291$, y la solución se ve de la siguiente manera (la linea gris corresponde al tiempo cero):



Para $q = 4$ y $t = 0.007$, tenemos $e^{-q^2\pi^2 t} \approx 0.331$, y la función se ve así:



2. Ejercicio (comprobación de la fórmula). Sea q un parámetro entero positivo. Mostrar que la función

$$u(x,t) = \operatorname{sen}(q\pi x)\, e^{-q^2\pi^2 t}$$

satisface la ecuación $(D_2 u)(x,t) = (D_1^2 u)(x,t)$ con las condiciones de frontera $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y con la condición inicial $u(x,0) = \operatorname{sen}(q\pi x)$. Recordemos fórmulas elementales para las derivadas (respecto a una variable independiente v):

$$\big(\operatorname{sen}(5v)\big)' = \boxed{\qquad\qquad}, \qquad \big(\cos(5v)\big)' = \boxed{\qquad\qquad},$$

$$\big(\operatorname{sen}(5v)\big)'' = \boxed{\qquad\qquad}, \qquad \big(e^{-7v}\big)' = \boxed{\qquad\quad}.$$

Calculemos la derivada de u respecto al tiempo:

$$(D_2 u)(x,t) = \operatorname{sen}(q\pi x)\big(\boxed{\qquad\qquad}\big)\underbrace{\boxed{\qquad\qquad}}_{e^{???}}.$$

Calculemos la segunda derivada de u respecto al argumento espacial:

$$(D_1^2 u)(x,t) = \boxed{\qquad\qquad}\ \operatorname{sen}(q\pi x)\ e^{-q^2\pi^2 t}.$$

Además, en los puntos $x = 0$ y $x = 1$ la función u toma el valor $\boxed{\quad}$,
y en el tiempo inicial $t = 0$ la función u se simplifica a

$$u(x,0) = \boxed{\qquad\qquad}.$$

3. Programación de la función. La fórmula (1) es tan simple que se puede programar en una linea. Por ejemplo, para $q = 5$,

```
utrig = @(x, t) sin(5 * pi * x) * exp(???);
```

También programemos la función de la condición inicial, con $q = 5$:

```
ftrig = @(x) sin(???);
```

Mostemos las gráficas de u (en el tiempo $t = 0.004$) y f:

```
xg = linspace(0, 1, 301);
plot(xg, ftrig(xg), 'k', xg, utrig(xg, 0.004), '*');
```

Se recomienda mostrar la gráfica de u con varios valores de q y t y entender qué se cambia en la gráfica cuando cambiamos q y t.