Programación: solución de la ecuación de calor con una condición inicial triangular

1. Solución de la ecuación de calor sobre un intervalo finito mediante la serie de Fourier. Consideremos la ecuación de calor

$$(D_2 u)(x,t) = (D_1^2 u)(x,t) \qquad (0 < x < 1,\ t > 0), \tag{1}$$

o, en la notación clásica, $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \qquad\qquad$.
Suponemos que la función u se anula en la frontera del intervalo:

$$u(0,t) = \qquad, \qquad u(1,t) = \qquad \qquad (t \geq 0), \tag{2}$$

y satisface una condición inicial:

$$u(x,t) = f(x) \qquad (0 \leq x \leq 1). \tag{3}$$

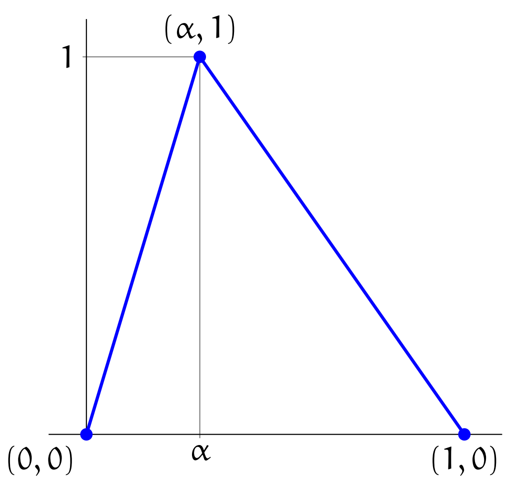
Suponemos que $f \in C([0,1])$, $f(0) = f(1) = 0$. Entonces la solución se puede escribir mediante la serie de Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, e^{-k^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x), \tag{4}$$

donde $f_1, f_2, f_3, \ldots$ son los coeficientes de Fourier de la función f respecto a las funciones básicas $\operatorname{sen}(k\pi x)$ en el intervalo $[0,1]$:

$$f_k = 2 \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\qquad) \, dx. \tag{5}$$

2. Condición inicial triangular.



Trabajemos con la función lineal a trozos dada por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\qquad}, & 0 \leq x \leq \alpha; \\[2ex] \dfrac{\qquad}{\qquad}, & \alpha \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calculemos sus coeficientes de Fourier (antes de la clase práctica):

$$f_k = \frac{2}{} \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}(k\pi x)\,dx + \frac{2}{} \int_{\alpha}^{1} \operatorname{sen}(k\pi x)\,dx = \ldots .$$

Finalmente obtenemos

$$f_k = \frac{2\operatorname{sen}(k\pi\alpha)}{\alpha(1-\alpha)k^2\pi^2}. \tag{6}$$

3. Programación de la solución de la ecuación de calor con la condición inicial triangular. Programemos una función que calcule los valores de la solución del Problema 1 con la función inicial `f` definida arriba.

```
function [u] = triangularsolution(al, x, t, kmax)
```

Notamos que `x` es un vector (columna), por eso `u` también es un vector de la misma longitud. En vez de la serie infinita (4) calculemos una suma finita

$$\sum_{k=1}^{k_{\max}} f_k\, e^{-k^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x). \tag{7}$$

Calculemos por separado los valores de f_k, los valores de $e^{-k^2\pi^2 t}$, y los valores de $\operatorname{sen}(k\pi x)$.

4. Programamos el cálculo de los coeficientes de Fourier para nuestra función. Ejecute los siguientes comandos:

```
ks = (1 : 3)'
piks2 = (pi * ks) .^ 2
fcoefs = sin(ks * pi * 0.1)
```

Escriba los comandos generales, usando la fórmula (6) y los parámetros `al` y `kmax`:

```
ks = ???
piks2 = ???
fcoefs = (2 / (al * (???)) * sin(??? * ??? * ???) ./ ???;
```

5. Programamos el cálculo de los factores exponenciales. Ejecute los siguientes comandos:

```
ks = (1 : 3)'
piks2 = ???
efactors = exp(- ??? * 0.3)
```

Escriba los comandos generales, usando los parámetros `t` y `kmax`:

```
ks = (1 : 3)'; piks2 = ???;
efactors = exp(???);
```

6. Programamos el cálculo de los factores sen$(k\pi x)$. Notamos que k corre de 1 a k_{max} y que x es un vector dado. En el programa guardamos `ks` como un renglón y suponemos que `x` está dado como una columna. Escriba el siguiente producto diádico:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad & \qquad & \qquad \\ \hline \qquad & \qquad & \qquad \end{array}\right].$$

Después de formar esta matriz M y multiplicarla por el número ______, aplicamos la función ________ y obtenemos la matriz que necesitamos:

$$S = \left[\mathrm{sen}(k\pi x_j)\right]_{j,k=1}^{\mathrm{length}(x),k_{\mathrm{max}}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad\qquad & \qquad\qquad & \mathrm{sen}(3\pi x_1) \\ \hline \qquad\qquad & \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{array}\right].$$

En el lenguaje Matlab/Octave,

```
krow = ???
S = sin(??? * ??? * ???)
```

7. Idea: en vez de calcular sumas, multiplicamos cierta matriz por cierto vector. Recordamos que $S_{j,k} = \mathrm{sen}(k\pi x_j)$. Escriba el siguiente producto para entender la idea:

$$\begin{bmatrix} u(x_1,t) \\ u(x_2,t) \end{bmatrix} \approx \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad\qquad & \qquad\qquad & \mathrm{sen}(3\pi x_1) \\ \hline \qquad\qquad & \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{array}\right] \begin{bmatrix} f_1\,e^{-\pi^2 t} \\ f_2\,e^{-4\pi^2 t} \\ f_3\,e^{-9\pi^2 t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_1\,e^{-\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(\pi x_1) + \qquad\qquad\qquad + f_3\,e^{-9\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(3\pi x_1) \\ \qquad \end{bmatrix}.$$

8. Juntamos las piezas. Escriba la función que calcule los valores de u:

```
function [u] = triangularsolution(al, x, t, kmax),
   krow = ???; ks = krow'; piks2 = ???;
   fcoefs = ???;
   efactors = ???;
   S = ???;
   u = ??? * (fcoefs .* ???);
end
```

9. Pruebas.

```
xg = linspace(0, 1, 201)';
plot(xg, triangularsolution(0.3, xg, 0.1, 100));
plot(xg, triangularsolution(0.3, xg, 0, 100));
```