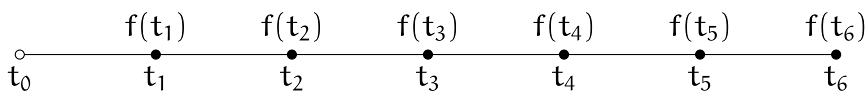
Algunos métodos de integración numérica (repaso breve)

Objetivos. Programar los métodos más simples de integración numérica.

1. La partición del intervalo. Dividimos el intervalo dado $[a, b]$ en n partes iguales, de longitud $h = (b - a)/n$, y denotamos por $t_0, \ldots, t_n$ a los $(n + 1)$ puntos obtenidos de esta manera:

$$t_j = a + jh \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

2. El método de rectángulos derechos (la regla del rectángulo derecho compuesta).



En cada subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$ la función se aproxima por su valor en el extremo derecho de este subintervalo:

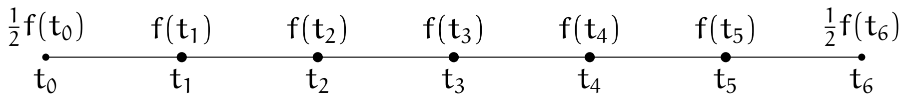
$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j).$$

Programamos la función correspondiente (recuerde que los índices de los arreglos en Matlab empiezan desde 1):

```
function [result] = quadrightrectangles(f, a, b, n),
   h = (??? - ???) / ???;
   t = linspace(a, b, ???)';
   v = f(t);
   result = h * sum(v(2 : ???));
end
```

3. El método de los trapecios (la regla del trapecio compuesta). En cada subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$ la función se aproxima por el número $(f(t_{j-1}) + f(t_j))/2$:

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} f(t_j) \right) = \frac{b-a}{2n} \left(f(???) + f(???) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) \right).$$



Modifique la función anterior:

```
function [result] = quadtrapezoid(f, a, b, n),
   ...
   sumbordervalues = v(???) + v(???);
   summidvalues = sum(v(??? : ???));
   result = ???;
end
```

4. Comprobación. Elija alguna función cuya integral sea fácil de calcular por fórmulas exactas. Por ejemplo, calcule la siguiente integral:

$$\int_0^{\pi} t \cos(t)\, dt.$$

Ahora aproxime esta integral con los métodos numéricos programados y muestre los errores correspondientes:

```
function [] = testquad(n),
   f = @(t) t .* cos(t); a = 0; b = pi;
   Iexact = ???;
   Irightrectangles = quadrightrectangles(f, a, b, n);
   display(abs(Iexact - Irightrectangles));
   Itrapezoid = quadtrapezoid(f, a, b, n);
   display(abs(Iexact - Itrapezoid));
end
```

Observe cómo se cambia el error en el método de rectángulos derechos cuando n crece. ¿Cuántas veces se disminuye el error cuando pasamos de $n = 100$ a $n = 1000$? ¿Y de $n = 1000$ a $n = 10000$? ¿Qué pasa con el error del método de trapecios?

5. El método de rectángulos medios (opcional). En cada subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$ la función se aproxima por su valor en el punto $(t_{j-1} + t_j)/2$:

$$\int_a^b f(t)\, dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + h\left(j - \frac{1}{2}\right)\right).$$

6. La regla de Simpson compuesta (opcional). Encuentre y programe las fórmulas del método de Simpson. Haga comprobaciones y analice el comportamiento del error.