Programación: Interpolación segmentaria lineal

Objetivos. Programar de la interpolación segmentaria lineal.

Requisitos. Función lineal (afín), búsqueda de un número en un arreglo ordenado.

1. Función lineal a trozos. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales tales que

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Vamos a trabajar con una función lineal a trozos que es lineal en cada segmento $[x_k, x_{k+1}]$:

$$S(x) = a_k + b_k(x - x_k) \qquad (x_k \le x \le x_{k+1}).$$

Para evaluar S en un punto dado x es importante encontrar un índice k tal que $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Para determinar k de manera única partimos $[x_1, \ldots, x_n]$ en los intervalos

$$[x_1, x_2), \quad [x_2, x_3), \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n), \quad \{x_n\}.$$

En el segmento degenerado $\{x_n\}$ la función S actúa mediante la regla

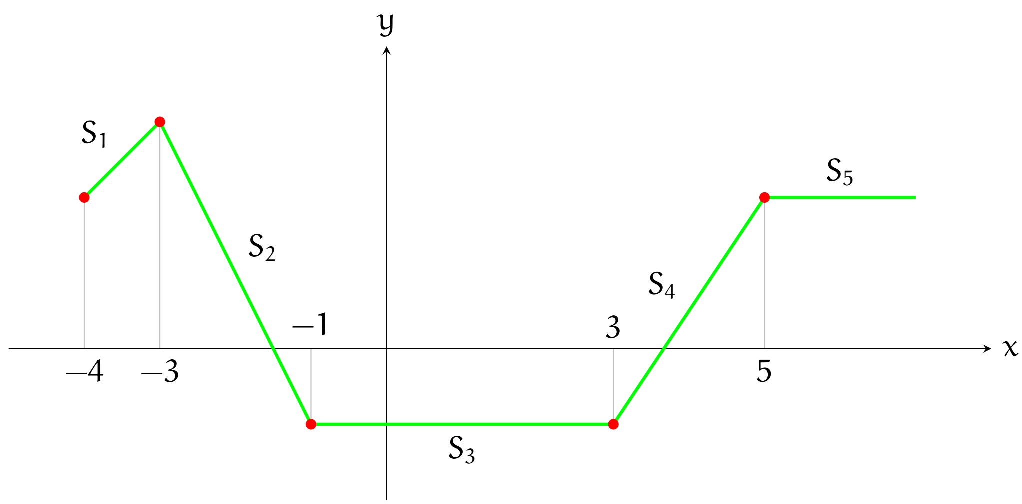
$$S(x) = a_n + b_n(x - x_n), \qquad \text{donde} \quad a_n = y_n, \quad b_n = 0.$$

2. Ejemplo. Construir la función interpolante S lineal a trozos que corresponda a las siguientes abscisas y ordenadas:

$$\begin{array}{lllll} x_1 = -4, & x_2 = -3, & x_3 = -1, & x_4 = 3, & x_5 = 5 \\ y_1 = 2, & y_2 = 3, & y_3 = -1, & y_4 = -1, & y_5 = 2. \end{array}$$

Calcular $S(4)$.

Solución. Representamos los nodos dados en el plano y los unimos sucesivamente con segmentos de recta. Nuestro objetivo es describir la gráfica obtenida de manera analítica.



Calculemos los coeficientes a_k, b_k y construyamos las funciones lineales S_k:

$x_1 = -4$	$y_1 = 2$	$a_1 = 2$	$b_1 = \frac{1}{2}$	$S_1(x) = 2 + \frac{1}{2}(x+4)$
$x_2 = -3$	$y_2 = 3$	$a_2 =$	$b_2 =$	$S_2(x) =$
$x_3 = -1$	$y_3 = -1$	$a_3 =$	$b_3 = 0$	$S_3(x) =$
$x_4 = 3$	$y_4 = -1$	$a_4 =$	$b_4 =$	$S_4(x) =$
$x_5 = 5$	$y_5 = 2$	$a_5 = 2$	$b_5 = 0$	$S_5(x) = 2$

Para calcular $S(1)$, buscamos el segmento de forma $[x_k, x_{k+1})$ que contiene al punto $x = 3$. Es fácil ver que $1 \in [x_3, x_4)$, así que $k = 3$.

$$S(1) = S_3(1) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$ □

3. Búsqueda de un número en un arreglo ordenado. Anteriormente programamos una función `countleq` de dos argumentos a (arreglo ordenado de números reales) y v (número real) que calcula el número de los elementos de a que son menores o iguales a v. Por ejemplo,

`countleq([3, 4, 4, 5.2, 7], 4.5)` regresa 3.

`countleq([3, 4, 4, 5.2, 7], 8)` regresa 5.

4. Cálculo de los coeficientes de la interpolación segmentaria lineal. Escriba una función `createlinspline` que calcule y regrese los coeficientes de la función lineal a trozos que tiene nodos en los puntos dados.

Entrada: arreglos x, y de números reales.

Propiedades de la entrada: los arreglos x, y son de la misma longitud, la cual denotamos por n. Los elementos de x forman una lista estrictamente creciente:

$$x_1 < \ldots < x_n.$$

Salida: un arreglo M de tamaño $n \times 3$, cuyas columnas son los vectores x, a, b de la explicación 1, tales que la función S correspondiente es continua en $[x_1, x_n]$, es lineal en cada segmento $[x_k, x_{k+1}]$ y $S(x_k) = y_k$ para cada k en $\{1, \ldots, n\}$.

5. Comprobación. Si x consiste de números $1, 5, 7, 8$, y consiste de números 3, -1, 0, 3, entonces la función `createlinspline` debe regresar la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 0.5 \\ 7 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Evaluación de una función lineal a trozos. Escriba una función `linspline` de dos argumentos M y p que evalue la función lineal a trozos S determinada por los datos M, en cada uno de los elementos del vector $p = [p_1, \ldots, p_m]^\top$.

- Entrada: una matriz M cuyas columnas x, a, b tienen sentido explicado arriba, un arreglo p de números reales.
- Propiedades de la entrada: la matriz M debe tener tres columnas; denotamos el número de los renglones de M por n, denotamos las columnas de M por x, a, b, las entradas de x forman una tupla estrictamente creciente, las componentes de p pertenecen al segmento $[x_1, x_n]$. Se supone que $b_n = 0$.
- Salida: el vector de los valores de la función S en los puntos $p_1, \ldots, p_m$.

Para cada uno de los puntos p_j la función debe determinar el número k tal que $p_j \in [x_k, x_{k+1}]$, (se recomienda usar la función `countleq`) y calcular

$$S(p_j) = a_k + b_k(p_j - x_k).$$

La misma fórmula funciona para $p_j = x_n$.

7. Prueba total. Haga una prueba con los datos del ejemplo. Al final calcule la función S en muchas abscisas y dibuje su gráfica.