Programación: Ejemplos para el método de punto fijo

Objetivos. Preparar ejemplos para el método de punto fijo. Aprender a construir gráficas de funciones y aplicarlas para el análisis de su comportamiento.

Requisitos. Teoremas sobre la convergencia al punto fijo, teorema sobre la divergencia del punto fijo, teorema del punto intermedio, teorema del punto medio, saber dibujar una gráfica en un sistema de álgebra computacional.

1. Con ayuda del teorema del valor intermedio muestre que la función $g(x) = x^3 - x - 1$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

$$g(1) \approx \qquad\qquad g(2) \approx$$

2. Muestre que la función $g(x) = e^x + x - 2$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 0.8]$.

$$g(0) \approx \qquad\qquad g(0.8) \approx$$

3. Pasar de la búsqueda de las raíces al cálculo de los puntos fijos. Vamos a calcular las raíces de estas funciones usando el método de iteración de punto fijo:

- la ecuación $x^3 - x - 1$ se puede escribir en forma $x = x^3 - 1$ o $x = \sqrt[3]{x+1}$;
- la ecuación $e^x + x - 2$ se puede escribir en forma $x = 2 - e^x$ o $x = \ln(2 - x)$.

4. ¿Cómo dibujar juntas dos gráficas en Wolfram Mathematica?
Recordemos cómo dibujar juntas las gráficas de dos funciones en un intervalo:

```
Plot[{Cos[x], x}, {x, 0, 2}]
```

Por cierto, esta gráfica muestra que la función cos en el intervalo $[0, 2]$ tiene un punto fijo

$$p \approx 0.7.$$

5. ¿Cómo dibujar juntas dos gráficas en Matlab o en GNU Octave?

```
f = @(x) cos(x);        # definimos nuestra función f; en este ejemplo f(x) = cos(x)
g = @(x) x .^ 2;        # si x es un vector, se eleva el cuadrado entrada por entrada
xs = linspace(0, 2, 201);     # 201 puntos, de 0 a 2
plot(xs, f(xs), 'r-', xs, g(xs), 'b-');
```

Ejemplos buenos

6. Investigación de la función g_1.
Se considera la función g_1 en el intervalo $[a_1, b_1]$:

$$g_1(x) = \sqrt[3]{x+1}, \qquad [a_1, b_1] = [1, 2].$$

- Dibuje juntas la gráfica de $y = g_1(x)$ con la gráfica de $y = x$ en el intervalo $[a_1, b_1]$. Encuentre el valor aproximado del punto fijo como la abscisa de la intersección de las gráficas $y = g_1(x)$, $y = x$:
$$p_1 \approx$$
- Usando la gráfica de g_1 determine el mínimo y el máximo de g_1 en el intervalo $[a_1, b_1]$:
$$\min_{x\in[a_1,b_1]} g_1(x) \approx \qquad , \qquad \max_{x\in[a_1,b_1]} g_1(x) \approx$$
- Basándose en el resultado del inciso anterior calcule la imagen del intervalo $[a_1, b_1]$ bajo la función g_1:
$$g_1([a_1, b_1]) \approx \Big[\qquad , \qquad \Big]$$
- Dibuje la gráfica de la función g_1' en el intervalo $[a_1, b_1]$. Usando esta gráfica encuentre el máximo y el mínimo de g_1' en el intervalo $[a_1, b_1]$, además encuentre el máximo y el mínimo de $|g_1'|$:
$$\min_{x\in[a_1,b_1]} g_1'(x) \approx \qquad \max_{x\in[a_1,b_1]} g_1'(x) \approx$$
$$\min_{x\in[a_1,b_1]} |g_1'(x)| \approx \qquad \max_{x\in[a_1,b_1]} |g_1'(x)| \approx$$
- Determine si g_1 es contractiva en $[a_1, b_1]$ o no.

7. Investigación de la función g_2. Haga lo mismo que en el ejercicio anterior para la función g_2 en el intervalo $[a_2, b_2]$:

$$g_2(x) = \ln(2 - x), \qquad [a_2, b_2] = [0, 0.8].$$

$$\min_{x \in [a_2, b_2]} g_2(x) \approx \qquad \max_{x \in [a_2, b_2]} g_2(x) \approx$$

$$g_2([a_2, b_2]) \approx \qquad p_2 \approx$$

$$\min_{x \in [a_2, b_2]} g_2'(x) \approx \qquad \max_{x \in [a_2, b_2]} g_2'(x) \approx$$

$$\min_{x \in [a_2, b_2]} |g_2'(x)| \approx \qquad \max_{x \in [a_2, b_2]} |g_2'(x)| \approx$$

8. Investigación de la función g_3.

$$g_3(x) = x - \frac{x^3 - x - 1}{3x^2 - 1}, \qquad [a_3, b_3] = [1.2, 2].$$

$$\min_{x \in [a_3, b_3]} g_3(x) \approx \qquad \max_{x \in [a_3, b_3]} g_3(x) \approx$$

$$g_3([a_3, b_3]) \approx \qquad p_3 \approx$$

$$\min_{x \in [a_3, b_3]} g_3'(x) \approx \qquad \max_{x \in [a_3, b_3]} g_3'(x) \approx$$

$$\min_{x \in [a_3, b_3]} |g_3'(x)| \approx \qquad \max_{x \in [a_3, b_3]} |g_3'(x)| \approx$$

Ejemplos malos

9. Función g_4.

$$g_4(x) = x^3 - 1, \qquad [a_4, b_4] = [1, 2].$$

$$\min_{x\in[a_4,b_4]} g_4(x) \approx \qquad\qquad \max_{x\in[a_4,b_4]} g_4(x) \approx$$

$$g_4([a_4, b_4]) \approx \qquad\qquad p_4 \approx$$

$$\min_{x\in[a_4,b_4]} g_4'(x) \approx \qquad\qquad \max_{x\in[a_4,b_4]} g_4'(x) \approx$$

$$\min_{x\in[a_4,b_4]} |g_4'(x)| \approx \qquad\qquad \max_{x\in[a_4,b_4]} |g_4'(x)| \approx$$

$$g_4'(p) \approx$$

Explique por qué el método del punto fijo no se puede aplicar a la función g_4 en el intervalo $[a_4, b_4]$.

10. Función g_5.

$$g_5(x) = 2 - e^x, \qquad [a_5, b_5] = [0, 0.8].$$

$$\min_{x\in[a_5,b_5]} g_5(x) \approx \qquad\qquad \max_{x\in[a_5,b_5]} g_5(x) \approx$$

$$g_5([a_5, b_5]) \approx \qquad\qquad p_5 \approx$$

$$\min_{x\in[a_5,b_5]} g_5'(x) \approx \qquad\qquad \max_{x\in[a_5,b_5]} g_5'(x) \approx$$

$$\min_{x\in[a_5,b_5]} |g_5'(x)| \approx \qquad\qquad \max_{x\in[a_5,b_5]} |g_5'(x)| \approx$$

$$g_5'(p) \approx$$

Explique por qué el método del punto fijo no se puede aplicar a la función g_5 en el intervalo $[a_5, b_5]$.