Programación:
División de un polinomio entre un binomio mónico

Objetivos. Escribir una función que divida un polinomio entre un binomio mónico. Vamos a usar esta función en otras partes del curso. En este texto estamos suponiendo que los índices de arreglos empiezan desde 1.

Requisitos. Ciclos, multiplicación de un polinomio por un binomio, representación de listas (arreglos), representación de polinomios.

El algoritmo que vamos a estudiar tiene varios nombres: división sintética, algoritmo de Horner, regla de Ruffini.

1. Guardar polinomios como listas de coeficientes en el orden ascendente. Como antes, representamos polinomios como listas de sus coeficientes, empezando con el término independiente. Por ejemplo, representamos el polinomio

$$f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 1$$

como la siguiente lista:

$$\underbrace{\qquad}_{?},\ \underbrace{\qquad}_{?},\ \underbrace{\qquad}_{?},\ 5.$$

El grado de este polinomio es $\underbrace{\qquad}_{?}$, y la lista de coeficientes es de longitud $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Se dice que -7 es el coeficiente de la potencia $\underbrace{\qquad}_{x^?}$.

En general, un polinomio $a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_nx^{n-1}$ se guarda como la lista de sus coeficientes:

$$\underbrace{\qquad\quad}_{?},\ \underbrace{\qquad\quad}_{?},\ \underbrace{\qquad\quad}_{?},\ \ldots,\ \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

Si $a_n \neq 0$, entonces el grado del polinomio es $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$,

y la longitud de la lista de coeficientes es $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$.

Para cada índice $k \in \{1, \ldots, n\}$, el número a_k es el coeficiente de la potencia $\underbrace{\qquad\quad}_{x^?}$.

Fórmulas para dividir un polinomio entre un binomio mónico (se recomienda deducirlas antes de la clase práctica)

2. Polinomios mónicos (repaso). Un polinomio de una variable se llama *mónico* el coeficiente de la mayor potencia en este polinomio es igual a 1. Por ejemplo, el polinomio $4 - 6x + x^2$ es mónico, y $7 - 5x - 4x^2$ no lo es.

3. Caso $n = 5$, construimos un sistema de ecuaciones. Vamos a dividir $f(x)$ entre $g(x)$, donde $f(x)$ es un polinomio de grado 4 y $g(x)$ es un binomio mónico:

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4, \qquad g(x) = -b + x.$$

Dividir $f(x)$ entre $(x - b)$ significa encontrar un polinomio $q(x)$ y un número r tales que

$$f(x) = (x - b)q(x) + r.$$

De la fórmula $(x - b)q(x) = f(x) - r$ concluimos que

el producto $(x - b)q(x)$ debe ser del mismo grado que $f(x)$, esto es, de grado $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Por eso el polinomio $q(x)$ debe ser de grado $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Denotemos sus coeficientes por c_1, c_2, c_3, c_4 y obtenemos la siguiente ecuación:

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 = (-b + x)(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) + r.$$

Igualamos los coeficientes de las potencias de x en ambos lados:

$$\text{coeficiente de } x^0: \quad \underbrace{\qquad\quad}_{a_?} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}\ \underbrace{\qquad\quad}_{?} + \underbrace{\qquad\quad}_{?}; \tag{1}$$

$$\text{coeficiente de } x^1: \quad \underbrace{\qquad\quad}_{a_?} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}; \tag{2}$$

$$x^2: \quad \underbrace{\qquad\quad}_{a_?} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}; \tag{3}$$

$$x^3: \quad \underbrace{\qquad\quad}_{a_?} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}; \tag{4}$$

$$x^4: \quad \underbrace{\qquad\quad}_{a_?} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}. \tag{5}$$

Las incógnitas de este sistema de ecuaciones son c_1, c_2, c_3, c_4, r.

4. Caso $n = 5$, resolvemos el sistema de ecuaciones.
Estamos resolviendo el sistema de ecuaciones (1)–(5).

La $\underbrace{\hspace{3cm}}_{\text{primera/última}}$ ecuación del sistema tiene solamente una incógnita,

y esta incógnita ya está en la forma despejada:

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{c_?} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{a_?}. \tag{6}$$

Ahora de la ecuación ($\underbrace{\hspace{0.6cm}}_{?}$) podemos despejar otra incógnita $\underbrace{\hspace{1cm}}_{c_?}$,

esto es, expresarla en términos de $\underbrace{\hspace{1cm}}_{c_?}$, $\underbrace{\hspace{1cm}}_{a_?}$ y $\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$,

Luego de la ecuación $\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$ despejamos $\underbrace{\hspace{1cm}}_{?}$, etc.:

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{c_?} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}\, c_4 + \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}; \tag{7}$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{c_?} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}\,\underbrace{\hspace{1cm}}_{?} + \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}; \tag{8}$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{c_?} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}\,\underbrace{\hspace{1cm}}_{?} + \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}; \tag{9}$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{?} = \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}\,\underbrace{\hspace{1cm}}_{?} + \underbrace{\hspace{1cm}}_{?}. \tag{10}$$

Aunque sabemos el valor de la incógnita c_4, no lo sustituimos en (7).
De manera similar, en (8) dejamos c_3, etc.
Por supuesto, para $n = 5$ podríamos escribir $c_4, c_3, \ldots$ en términos de $a_1, \ldots, a_5$ y b, pero las fórmulas serían complicadas y no podríamos generalizarlas.
Preferimos escribir fórmulas *recursivas* porque son cómodas para generalizar y programar.

Notemos que las fórmulas (7), (8) y (9) tienen la misma estructura:

$$c_k = \underbrace{\hspace{3cm}}_{?}, \qquad k = 3, \underbrace{\hspace{0.6cm}}_{?}, \underbrace{\hspace{0.6cm}}_{?}. \tag{11}$$

Las fórmulas (6) y (10) tienen otras expresiones en el lado izquierdo o en el lado derecho.

5. Fórmulas para n general.
Ahora vamos a dividir $f(x)$ entre $g(x)$, donde $f(x)$ es de grado $n-1$ y $g(x)$ es un polinomio mónico:

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}, \qquad g(x) = -b + x.$$

Buscamos un polinomio $q(x)$ y un número r tales que

$$f(x) = (-b + x) q(x) + r.$$

El polinomio $q(x)$ es de grado $\underbrace{\qquad}_{?}$, es decir, tiene $\underbrace{\qquad}_{?}$ coeficientes.

Se debe cumplir la siguiente igualdad de polinomios:

$$(-b + x)(c_1 + c_2 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-2}) + r = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}.$$

Generalizando los resultados del Ejercicio 4 se puede ver que los coeficientes incógnitos $c_1, \ldots, c_{n-1}, r$ se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\underbrace{\qquad}_{c_?} = \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$c_k = \underbrace{\qquad}_{?} \underbrace{\qquad}_{c_?} + \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad k = \underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}, \ldots, \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$\underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Notemos que c_k se expresa en términos de $\underbrace{\qquad}_{c_?}$,

así que k debe ir en el orden $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{ascendente/descendente}}$ desde $\underbrace{\qquad}_{?}$ hasta $\underbrace{\qquad}_{?}$.

6. Algoritmo divpolbinom (pseudocódigo).

función divpolbinom(a, b):

variables locales: n, c, k;

$n := \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$;

$c :=$ lista nula de longitud $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$;

$\underbrace{\qquad\quad}_{c_?} := \underbrace{\qquad\quad}_{?}$;

para $k := \underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}, \ldots, \underbrace{\qquad}_{?}$:

$c_k := \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$;

$\underbrace{\qquad\quad}_{?} := \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$;

salida: $\underbrace{\qquad}_{?}$ y $\underbrace{\qquad}_{?}$.

7. Ciclos descendentes.

Los “ciclos descendentes” en Matlab o en GNU Octave se puede programar usando el comando : (dos puntos) e indicando un paso negativo. Se recomienda ejecutar los siguientes comandos (en Matlab se escribe `end` en vez de `endfor`):

```
for k = 100 : -10 : 60,
   disp(k);
endfor
```

8. Ejemplo de una función en Matlab o GNU Octave que regresa dos objetos.

Se recomienda guardar la siguiente función en un archivo `ab.m`:

```
function [p, q] = ab(n),
   p = n * n;
   q = 7 * ones(n, 1);
endfunction
```

Luego se pueden hacer pruebas desde el intérprete:

```
   ab(4)
   [p, q] = ab(4)
```

Programación de la división de un polinomio entre un binomio

9. Problema divpolbinom.
Traduzca el Algoritmo 6 a un lenguaje de programación. En otras palabras, escriba una función que divida un polinomio $f(x)$ entre un binomio $x - b$. Si se usa el lenguaje Matlab o GNU Octave, entonces hay que guardar la función `divpolbinom` en el archivo `divpolbinom.m`.

Entrada: el arreglo a de los coeficientes de $f(x)$ y el número b.

Salida: el arreglo de los coeficientes del cociente y el residuo.

10. Comprobación. Es fácil ver que $-11 + 8x - 5x^2 + x^3 = (-4 + x)(4 - x + x^2) + 5$. Por eso `[c, r] = divpolbinom([-11; 8; -5; 1], 4)` debe regresar `[4; -1; 1]` y `5`.

11. Comprobación. Divida el polinomio $2x^3 - 5x^2 + x - 7$ entre el binomio $x + 3$ (haga los cálculos en papel). Luego ejecute `[c, r] = divpolbinom([-7; 1; -5; 2], -3)`.

12. Problema poleval.
Escriba una función que calcule el valor del polinomio $f(x)$ con coeficientes dados en el punto dado b. Sugerencia: haga una copia del programa `divpolbinom` y modifique el código de tal manera que no se guarden todos los coeficientes del cociente.

Entrada: el arreglo a de los coeficientes del polinomio $f(x)$, el punto b.

Salida: el número $f(b)$.

Haga la comprobación con algunos ejemplos.

13. Sea $f(x)$ un polinomio y sea b un número. Recuerde como expandir $f(x)$ en las potencias del binomio $(x - b)$ usando la división sintética.

14. Sea $f(x)$ un polinomio y sea b un número. Sean $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ los coeficientes de la expansión de $f(x)$ en las potencias del binomio $(x - b)$:

$$f(x) = c_1 + c_2(x - b) + c_3(x - b)^2 + c_4(x - b)^3 + \ldots + c_n(x - b)^{n-1}.$$

Recuerde la fórmula de Taylor y exprese $f(b)$ y $f'(b)$ a través de c_1 y c_2.

15. Problema polvaldiff.
Escriba una función que calcule el valor del polinomio dado $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$ en el punto dado b, utilizando la función divpolbinom. Use los resultados de dos ejercicios anteriores.

Entrada: la lista de los coeficientes del polinomio $f(x)$, el punto b.

Salida: la lista que consiste de dos números, $f(b)$ y $f'(b)$.

Después de programar la función requerida haga comprobaciones.