Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales

Problemas para examen

1. Definición: función contractiva. Escriba la definición de función contractiva.

2. Desigualdad fundamental para funciones contractivas. Sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con un coeficiente K, y sean $x, y \in X$. Demuestre que

$$d(x, y) \le \frac{1}{1-K}\big(d(x, f(x)) + d(y, f(y))\big).$$

3. Iteraciones de una función. Sea $f\colon X \to X$. Escriba la definición inductiva de las iteraciones $f^{[k]}$.

4. Propiedad de Cauchy para las iteraciones de una función contractiva aplicadas a un punto. Sea $f\colon X \to X$ una función contractiva y sea $x_0 \in X$. Demuestre que la sucesión $(f^{[k]}(x_0))_{k=0}^{\infty}$ es de Cauchy.

5. El teorema del punto fijo de Banach. Enuncie y demuestre el teorema del punto fijo sobre funciones contractivas en espacios métricos completos. Enuncie y demuestre una cota superior para $d(f^{[k]}(x_0), p)$, donde $f(p) = p$.

6. Corolario del teorema del punto fijo de Banach sobre una función cuya iteración es contractiva. Sean X un espacio métrico completo, sea $f\colon X \to X$ una función y N un número entero positivo tal que la función $f^{[N]}$ es contractiva. Demuestre que la función f tiene un único punto fijo p. Enuncie y demuestre una cota superior para $d(f^{[k]}(x_0), p)$.

7. El teorema de Picard sobre la existencia y unicidad local de una solución del problema inicial para EDO, para un dominio tabular. Enuncie y demuestre el teorema para un dominio $A \times \mathbb{R}$, donde A es un intervalo acotado, suponiendo que f cumple con una condición de Lipschtz respecto a la segunda variable, de manera uniforme respecto a la primera variable.

8. Plan de análisis de los métodos numéricos para resolver EDO con condiciones iniciales. Vamos a resolver el problema

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

con varios métodos numéricos. Para cada uno de los métodos haremos los siguientes pasos:

1. Enunciar las fórmulas del método.

2. Deducir o explicar la idea de las fórmulas.

3. Programar el método.

4. Hacer pruebas simples del programa, comparando la solución numérica obtenida con la solución exacta.

5. Acotar el error teóricamente.

6. Contar el número de evaluaciones de la función f en el algoritmo.

7. Comprobar con ejemplos los resultados de los dos pasos anteriores.

9. Notación para la solución del problema de Cauchy. En lo que sigue suponemos que se cumplen las condiciones del Teorema 7, y para cada punto (t_0, x_0) en $A \times \mathbb{R}$ denotamos por x_{t_0,x_0} a la solución del problema de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0.$$

10. Desigualdad de Grönwall–Bellman. Enuncie y demuestre al desigualdad.

11. Teorema sobre la estabilidad de la solución del problema de Cauchy. Enuncie y demuestre el teorema.

12. Lema: de una cota superior recursiva a una cota superior directa. Sea $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales y sean $b > 1$, $c \geq 0$ tales que $a_0 = 0$ y para cada k en $\mathbb{N}_0$

$$a_{k+1} \leq c + b a_k.$$

Demuestre que para cada k en $\mathbb{N}_0$

$$a_k \leq c\,\frac{b^k - 1}{b - 1}.$$

13. Teorema: de una cota superior del error de truncamiento local a una cota superior global del error. Supongamos que se cumplen las condiciones del Teorema 7, que $S \in C(A \times \mathbb{R} \times (0, +\infty), \mathbb{R})$, y que para cualesquiera $t \in A$, $h > 0$, $t + h \in A$, $v \in \mathbb{R}$, se cumple la desigualdad

$$|S(t, v, h) - x_{t,v}(t + h)| \leq \varepsilon_h.$$

Sean $t_0 \in A$, $L > 0$ tal que $t_0 + L \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$. Pongamos $h = L/n$, $t_j = t_0 + jh$,

$$v_0 = x_0, \qquad v_{j+1} = S(t_j, v_j, h).$$

Entonces

$$\max_{0 \leq j \leq n} |v_j - x_{t_0,x_0}(t_j)| \leq \frac{e^{LK} - 1}{K} \frac{\varepsilon_h}{h}.$$

14. Una cota superior del error de truncamiento local en el método de Euler. Sea $f \in C(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, donde A es un intervalo de $\mathbb{R}$. Supongamos que $K, K_1, K_2 > 0$ y que para todos $t, u \in [t_0, t_0 + T]$ y $v, w \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(t, v)| &\leq K, \\ |f(t, v) - f(u, v)| &\leq K_1, \\ |f(t, v) - f(t, w)| &\leq K_2. \end{aligned}$$

Pongamos

$$S(t, v, h) = v + hf(t, v).$$

Supongamos que para cualesquiera $t \in A$, $h > 0$, $t + h \in A$, $v \in \mathbb{R}$, se cumple la desigualdad

$$|S(t, v, h) - x_{t,v}(t + h)| \leq (K_1 + K_2 K)\ h^2.$$

Explique cómo deducir la cota del error global

$$\max_{0 \leq j \leq n} |v_j - x_{t_0,x_0}(t_j)| \leq \left(e^{LK_2} - 1\right) \left(\frac{K_1}{K_2} + K\right) h.$$

15. Explique el método de Runge–Kutta. Deduzca una estimación superior para el error en el método de Runge–Kutta.

16. Programación: el método de Euler. En algún lenguaje de programación escribir una función `eulermethod` que resuelva una EDO de primer orden con un valor inicial usando el método de Euler.

Entrada: El arreglo `t` de las abscisas, el valor inicial `x0`, un puntero `f` a una función de dos argumentos.

Salida: El arreglo `v` de los valores aproximados de la función que satisface la ecuación

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

También escribir un ejemplo de función específica `fexample1` de dos argumentos y una función `testeulermethod1` sin argumentos que hace una prueba llamando `eulermethod` con `fexample1`.

17. El método de Heun. Analizar de manera similar el método de Heun.

18. Programación: el método de Runge–Kutta. Por analogía con el problema 16, escriba una función `rungekutta` que aplique el método de Runge–Kutta.