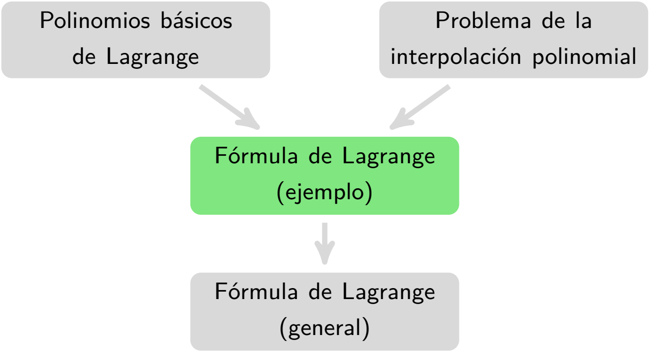
Fórmula de Lagrange
para el polinomio interpolante

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

7 de julio de 2017

Prerrequisitos



Sugiero poner una pausa,
preparar papel y lápiz

Ejercicio (primera indirecta para inventar la fórmula de Lagrange)

Sean f y g dos polinomios tales que

$$f(-4) = 5, \qquad g(-4) = 3.$$

Definimos el polinomio h como la siguiente combinación lineal de f y g:

$$h(x) = 10\,f(x) + 2\,g(x).$$

Calcular $h(-4)$.

Ejercicio (primera indirecta para inventar la fórmula de Lagrange)

Sean f y g dos polinomios tales que

$$f(-4) = 5, \qquad g(-4) = 3.$$

Definimos el polinomio h como la siguiente combinación lineal de f y g:

$$h(x) = 10\,f(x) + 2\,g(x).$$

Calcular $h(-4)$.

Buen momento para
detener la presentación
y resolver el ejercicio

Ejercicio (primera indirecta para inventar la fórmula de Lagrange)

Sean f y g dos polinomios tales que

$$f(-4) = 5, \qquad g(-4) = 3.$$

Definimos el polinomio h como la siguiente combinación lineal de f y g:

$$h(x) = 10\, f(x) + 2\, g(x).$$

Calcular $h(-4)$.

Respuesta. $h(-4) = 56$.

Ejercicio (segunda indirecta para inventar la fórmula de Lagrange)

Encontrar α, β, γ tales que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio (segunda indirecta para inventar la fórmula de Lagrange)

Encontrar α, β, γ tales que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Buen momento para
detener la presentación
y resolver el ejercicio

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) =$
0	1	0	$L_2(x) =$
0	0	1	$L_3(x) =$

Escribir $L_j(x)$, $j = 1, 2, 3$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) =$
0	1	0	$L_2(x) =$
0	0	1	$L_3(x) =$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{}$
0	1	0	$L_2(x) =$
0	0	1	$L_3(x) =$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{}$
0	1	0	$L_2(x) =$
0	0	1	$L_3(x) =$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)}$
0	1	0	$L_2(x) =$
0	0	1	$L_3(x) =$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \dfrac{x^2-3x-4}{6}$
0	1	0	$L_2(x) =$
0	0	1	$L_3(x) =$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \dfrac{x^2-3x-4}{6}$
0	1	0	$L_2(x) = \dfrac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)}$
0	0	1	$L_3(x) =$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \dfrac{x^2-3x-4}{6}$
0	1	0	$L_2(x) = \dfrac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)} = \dfrac{x^2-2x-8}{-5}$
0	0	1	$L_3(x) =$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \dfrac{x^2-3x-4}{6}$
0	1	0	$L_2(x) = \dfrac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)} = \dfrac{x^2-2x-8}{-5}$
0	0	1	$L_3(x) =$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \frac{x^2-3x-4}{6}$
0	1	0	$L_2(x) = \frac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)} = \frac{x^2-2x-8}{-5}$
0	0	1	$L_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{(4+2)(4+1)}$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \dfrac{x^2-3x-4}{6}$
0	1	0	$L_2(x) = \dfrac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)} = \dfrac{x^2-2x-8}{-5}$
0	0	1	$L_3(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)}{(4+2)(4+1)} = \dfrac{x^2+3x+2}{30}$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \frac{x^2-3x-4}{6}$
0	1	0	$L_2(x) = \frac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)} = \frac{x^2-2x-8}{-5}$
0	0	1	$L_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{(4+2)(4+1)} = \frac{x^2+3x+2}{30}$
7	-4	1	$P(x) =$

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \dfrac{x^2-3x-4}{6}$
0	1	0	$L_2(x) = \dfrac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)} = \dfrac{x^2-2x-8}{-5}$
0	0	1	$L_3(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)}{(4+2)(4+1)} = \dfrac{x^2+3x+2}{30}$
7	-4	1	$P(x) =$

Sugiero parar
la presentación
e inventar la fórmula

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:	
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \dfrac{x^2-3x-4}{6}$	$\times 7$
0	1	0	$L_2(x) = \dfrac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)} = \dfrac{x^2-2x-8}{-5}$	$\times(-4)$
0	0	1	$L_3(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)}{(4+2)(4+1)} = \dfrac{x^2+3x+2}{30}$	$\times 1$
7	-4	1	$P(x) =$	

Ejemplo. Hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.

valor en -2	valor en -1	valor en 4	Primero construimos los polinomios básicos de Lagrange:	
1	0	0	$L_1(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(-2+1)(-2-4)} = \dfrac{x^2-3x-4}{6}$	$\times 7$
0	1	0	$L_2(x) = \dfrac{(x+2)(x-4)}{(-1+2)(-1-4)} = \dfrac{x^2-2x-8}{-5}$	$\times(-4)$
0	0	1	$L_3(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)}{(4+2)(4+1)} = \dfrac{x^2+3x+2}{30}$	$\times 1$
7	-4	1	$P(x) = 7\,L_1(x) - 4\,L_2(x) + L_3(x)$	

Final de la solución. En la fórmula

$$P(x) = 7L_1(x) - 4L_2(x) + L_3(x)$$

sustituimos las expresiones para $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$:

$$P(x) = 7\,\frac{(x^2 - 3x - 4)}{6} + (-4)\,\frac{x^2 - 2x - 8}{-5} + \frac{x^2 + 3x + 2}{30}$$

Final de la solución. En la fórmula

$$P(x) = 7L_1(x) - 4L_2(x) + L_3(x)$$

sustituimos las expresiones para $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$:

$$P(x) = 7\,\frac{(x^2 - 3x - 4)}{6} + (-4)\,\frac{x^2 - 2x - 8}{-5} + \frac{x^2 + 3x + 2}{30}$$

Calcular $P(x)$.

Final de la solución. En la fórmula

$$P(x) = 7L_1(x) - 4L_2(x) + L_3(x)$$

sustituimos las expresiones para $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= 7\,\frac{(x^2 - 3x - 4)}{6} + (-4)\,\frac{x^2 - 2x - 8}{-5} + \frac{x^2 + 3x + 2}{30} \\ &= \frac{35(x^2 - 3x - 4) + 24(x^2 - 2x - 8) + (x^2 + 3x + 2)}{30} \end{aligned}$$

Final de la solución. En la fórmula

$$P(x) = 7L_1(x) - 4L_2(x) + L_3(x)$$

sustituimos las expresiones para $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$:

$$\begin{aligned}
P(x) &= 7\,\frac{(x^2 - 3x - 4)}{6} + (-4)\,\frac{x^2 - 2x - 8}{-5} + \frac{x^2 + 3x + 2}{30} \\
&= \frac{35(x^2 - 3x - 4) + 24(x^2 - 2x - 8) + (x^2 + 3x + 2)}{30} \\
&= \frac{35x^2 - 105x - 140 + 24x^2 - 48x - 192 + x^2 + 3x + 2}{30}
\end{aligned}$$

Final de la solución. En la fórmula

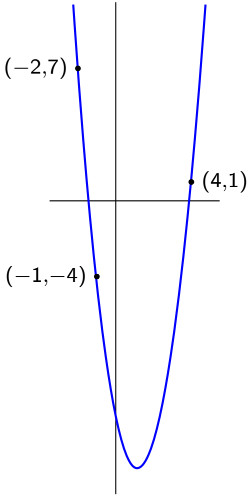
$$P(x) = 7L_1(x) - 4L_2(x) + L_3(x)$$

sustituimos las expresiones para $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$:

$$\begin{aligned}
P(x) &= 7\,\frac{(x^2-3x-4)}{6} + (-4)\,\frac{x^2-2x-8}{-5} + \frac{x^2+3x+2}{30} \\
&= \frac{35(x^2-3x-4) + 24(x^2-2x-8) + (x^2+3x+2)}{30} \\
&= \frac{35x^2 - 105x - 140 + 24x^2 - 48x - 192 + x^2 + 3x + 2}{30} \\
&= \frac{60x^2 - 150x - 330}{30} = 2x^2 - 5x - 11.
\end{aligned}$$

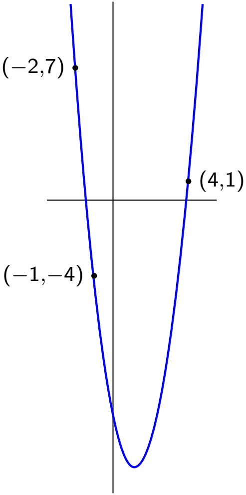
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11$$



Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$



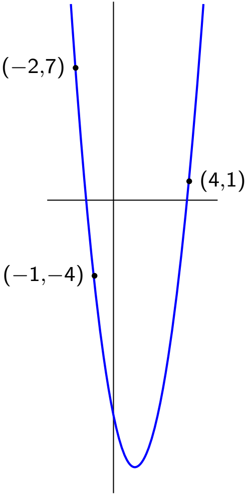
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 2 & -5 & -11 \\
\hline
\end{array}$$



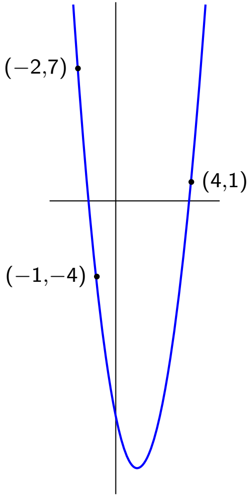
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 2 & -5 & -11 \\
\hline
-2 & & &
\end{array}$$



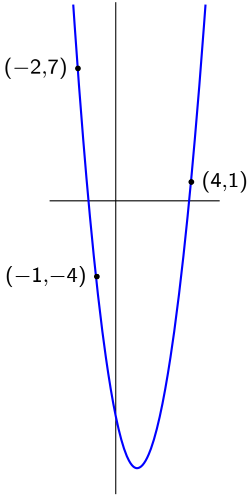
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 2 & -5 & -11 \\ \hline
-2 & 2 & &
\end{array}$$



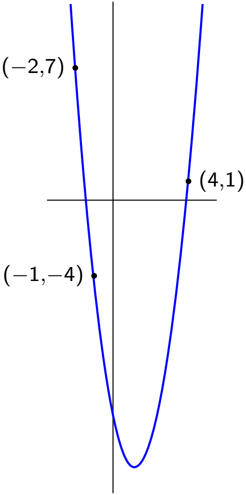
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -5 & -11 \\ \hline -2 & 2 & -9 & \end{array}$$



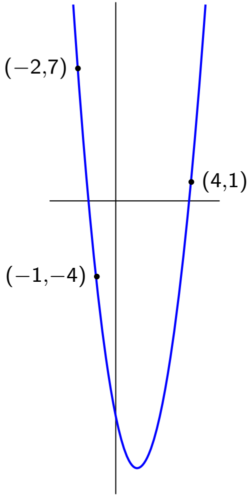
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -5 & -11 \\ \hline -2 & 2 & -9 & 7 \end{array}$$



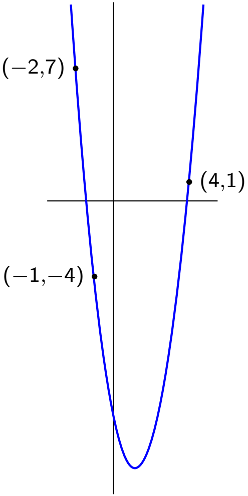
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -11 & \\ \hline -2 & 2 & -9 & 7 & \checkmark \end{array}$$



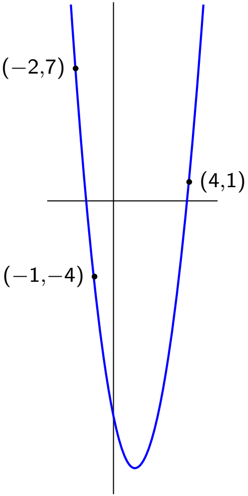
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & -11 & \\
\hline
-2 & 2 & -9 & 7 & \checkmark \\
-1 & & & &
\end{array}$$



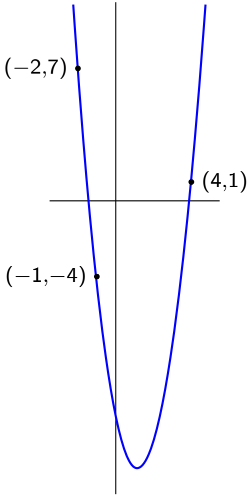
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

	2	-5	-11	
-2	2	-9	7	✓
-1	2			



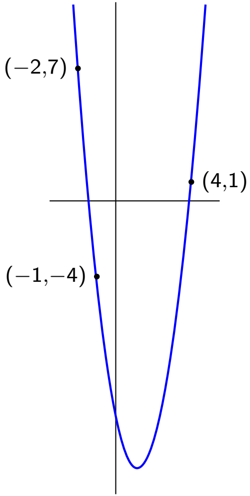
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -11 & \\ \hline -2 & 2 & -9 & 7 & \checkmark \\ -1 & 2 & -7 & & \end{array}$$



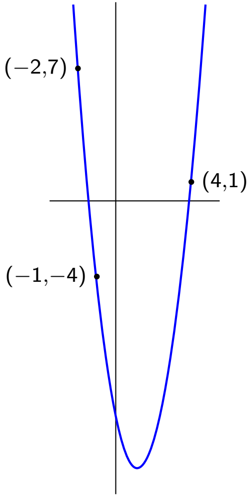
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -11 & \\ \hline -2 & 2 & -9 & 7 & \checkmark \\ -1 & 2 & -7 & -4 & \end{array}$$



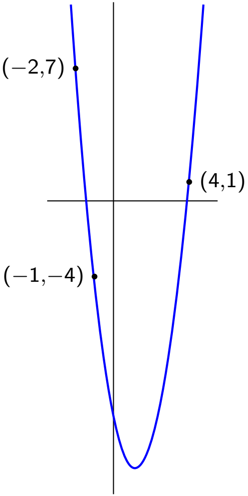
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

	2	−5	−11	
−2	2	−9	7	✓
−1	2	−7	−4	✓



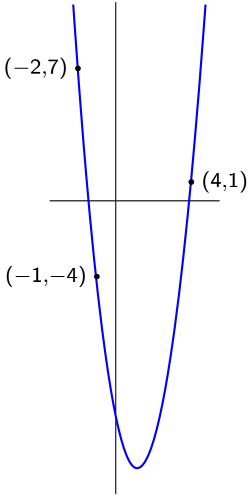
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

	2	−5	−11	
−2	2	−9	7	✓
−1	2	−7	−4	✓
4				



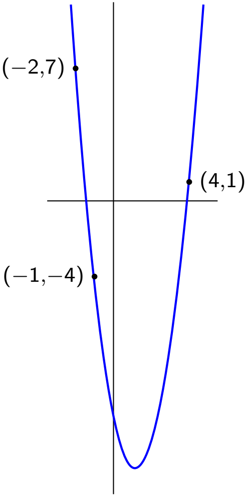
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

	2	−5	−11	
−2	2	−9	7	✓
−1	2	−7	−4	✓
4	2			



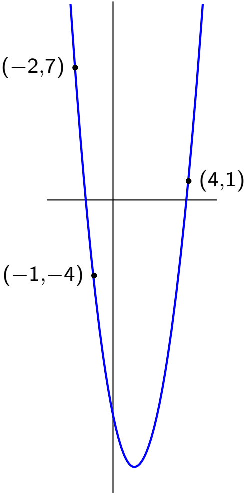
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

	2	-5	-11	
-2	2	-9	7	✓
-1	2	-7	-4	✓
4	2	3		



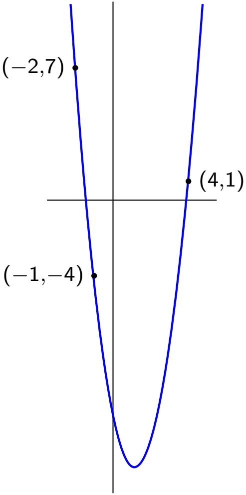
Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

	2	−5	−11	
−2	2	−9	7	✓
−1	2	−7	−4	✓
4	2	3	1	



Respuesta.

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 11 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}.$$

Comprobación.

Probemos que $P(-2) = 7$, $P(-1) = -4$, $P(4) = 1$.
Usamos la división sintética (Horner–Ruffini).

	2	−5	−11	
−2	2	−9	7	✓
−1	2	−7	−4	✓
4	2	3	1	✓

Ejercicio

I. Construir los polinomios básicos de Lagrange asociados a los puntos

$$-3, \qquad -2, \qquad 3.$$

II. Usando la fórmula de Lagrange hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

$$P(-3) = -12, \qquad P(-2) = -4, \qquad P(3) = 6.$$

III. Hacer la comprobación.

Ejercicio

I. Construir los polinomios básicos de Lagrange asociados a los puntos

$$-3, \qquad -2, \qquad 3.$$

II. Usando la fórmula de Lagrange hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

$$P(-3) = -12, \qquad P(-2) = -4, \qquad P(3) = 6.$$

III. Hacer la comprobación.

Resolver el ejercicio

Ejercicio

I. Construir los polinomios básicos de Lagrange asociados a los puntos

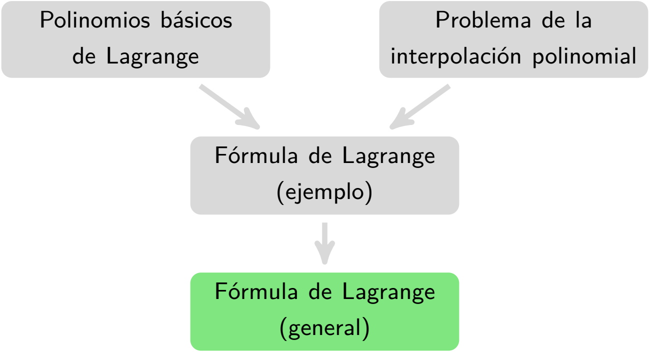
$$-3, \qquad -2, \qquad 3.$$

II. Usando la fórmula de Lagrange hallar un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

$$P(-3) = -12, \qquad P(-2) = -4, \qquad P(3) = 6.$$

III. Hacer la comprobación.

Respuesta: $P(x) = -x^2 + 3x + 6$.


Polinomios básicos de Lagrange
Problema de la interpolación polinomial
Fórmula de Lagrange (ejemplo)
Fórmula de Lagrange (general)

Fórmulas para los polinomios básicos de Lagrange (repaso)

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares.

Les corresponden n polinomios básicos de Lagrange: $L_1, \ldots, L_n$.

Elegimos un $j \in \{1, \ldots, n\}$.

El j-ésimo polinomio básico de Lagrange asociado a los números $x_1, \ldots, x_n$ se define como

$$L_j(x) :=$$

Fórmulas para los polinomios básicos de Lagrange (repaso)

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares.

Les corresponden n polinomios básicos de Lagrange: $L_1, \ldots, L_n$.

Elegimos un $j \in \{1, \ldots, n\}$.

El j-ésimo polinomio básico de Lagrange asoc efine como

Recordar la fórmula

$$L_j(x) :=$$

Fórmulas para los polinomios básicos de Lagrange (repaso)

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares.

Les corresponden n polinomios básicos de Lagrange: $L_1, \ldots, L_n$.

Elegimos un $j \in \{1, \ldots, n\}$.

El j-ésimo polinomio básico de Lagrange asociado a los números $x_1, \ldots, x_n$ se define como

$$L_j(x) := \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Fórmulas para los polinomios básicos de Lagrange (repaso)

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares.

Les corresponden n polinomios básicos de Lagrange: $L_1, \ldots, L_n$.

Elegimos un $j \in \{1, \ldots, n\}$.

El j-ésimo polinomio básico de Lagrange asociado a los números $x_1, \ldots, x_n$ se define como

$$L_j(x) := \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Propiedades principales de L_j:

- $\deg(L_j) =$
- $L_j(x_s) =$

Fórmulas para los polinomios básicos de Lagrange (repaso)

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares.

Les corresponden n polinomios básicos de Lagrange: $L_1, \ldots, L_n$.

Elegimos un $j \in \{1, \ldots, n\}$.

El j-ésimo polinomio básico de Lagrange asociado a los números $x_1, \ldots, x_n$ se define como

$$L_j(x) := \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Propiedades principales de L_j:

- $\deg(L_j) =$
- $L_j(x_s) =$

Recordar las propiedades

Fórmulas para los polinomios básicos de Lagrange (repaso)

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares.

Les corresponden n polinomios básicos de Lagrange: $L_1, \ldots, L_n$.

Elegimos un $j \in \{1, \ldots, n\}$.

El j-ésimo polinomio básico de Lagrange asociado a los números $x_1, \ldots, x_n$ se define como

$$L_j(x) := \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Propiedades principales de L_j:

- $\deg(L_j) = n - 1$,
- $L_j(x_s) = \delta_{j,s}$.

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange

con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x)$$

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange

con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange

con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Entonces:

$$\deg(P) \le$$

$$P(x_s) =$$

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange

con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Entonces:

$\deg(P) \le n - 1.$

$P(x_s) =$

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange

con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Entonces:

$\deg(P) \le n - 1.$ En efecto, $\deg(P) \le \max_{1 \le j \le n} \deg(y_j L_j) \le \max_{1 \le j \le n} \deg(L_j) = n - 1.$

$P(x_s) =$

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange

con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Entonces:

$\deg(P) \le n - 1.$ En efecto, $\deg(P) \le \max_{1 \le j \le n} \deg(y_j L_j) \le \max_{1 \le j \le n} \deg(L_j) = n - 1.$

$P(x_s) = y_s.$

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange

con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j\, L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Entonces:

$\deg(P) \le n - 1.$ En efecto, $\deg(P) \le \max\limits_{1\le j\le n} \deg(y_j L_j) \le \max\limits_{1\le j\le n} \deg(L_j) = n - 1.$

$P(x_s) = y_s.$ En efecto,

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange

con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Entonces:

$\deg(P) \le n - 1.$ En efecto, $\deg(P) \le \max\limits_{1 \le j \le n} \deg(y_j L_j) \le \max\limits_{1 \le j \le n} \deg(L_j) = n - 1.$

$P(x_s) = y_s.$ En efecto, $P(x_s) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x_s)$

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange

con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Entonces:

$\deg(P) \le n - 1.$ En efecto, $\deg(P) \le \max\limits_{1 \le j \le n} \deg(y_j L_j) \le \max\limits_{1 \le j \le n} \deg(L_j) = n - 1.$

$P(x_s) = y_s.$ En efecto, $P(x_s) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \, L_j(x_s) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \, \delta_{j,s}$

Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números.

Definimos P como la combinación lineal de los polinomios básicos de Lagrange con los coeficientes y_j:

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} y_j\, L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Entonces:

$\deg(P) \le n - 1.$ En efecto, $\deg(P) \le \max_{1 \le j \le n} \deg(y_j L_j) \le \max_{1 \le j \le n} \deg(L_j) = n - 1.$

$P(x_s) = y_s.$ En efecto, $P(x_s) = \sum_{j=1}^{n} y_j\, L_j(x_s) = \sum_{j=1}^{n} y_j\, \delta_{j,s} = y_s.$

Ventajas y desventajas de la fórmula de Lagrange

Ventajas y desventajas de la fórmula de Lagrange

+ Es directa (explícita, no recursiva) y simple:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Ventajas y desventajas de la fórmula de Lagrange

- Es directa (explícita, no recursiva) y simple:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

- Sirve para estimar el error de la interpolación

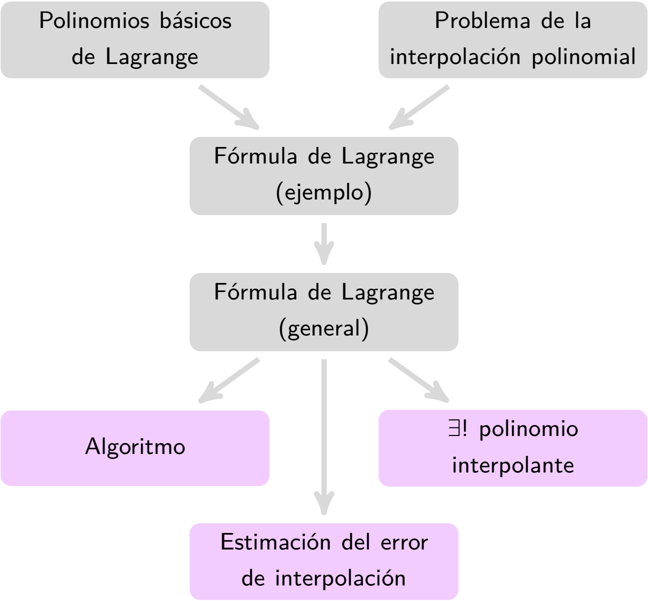
Ventajas y desventajas de la fórmula de Lagrange

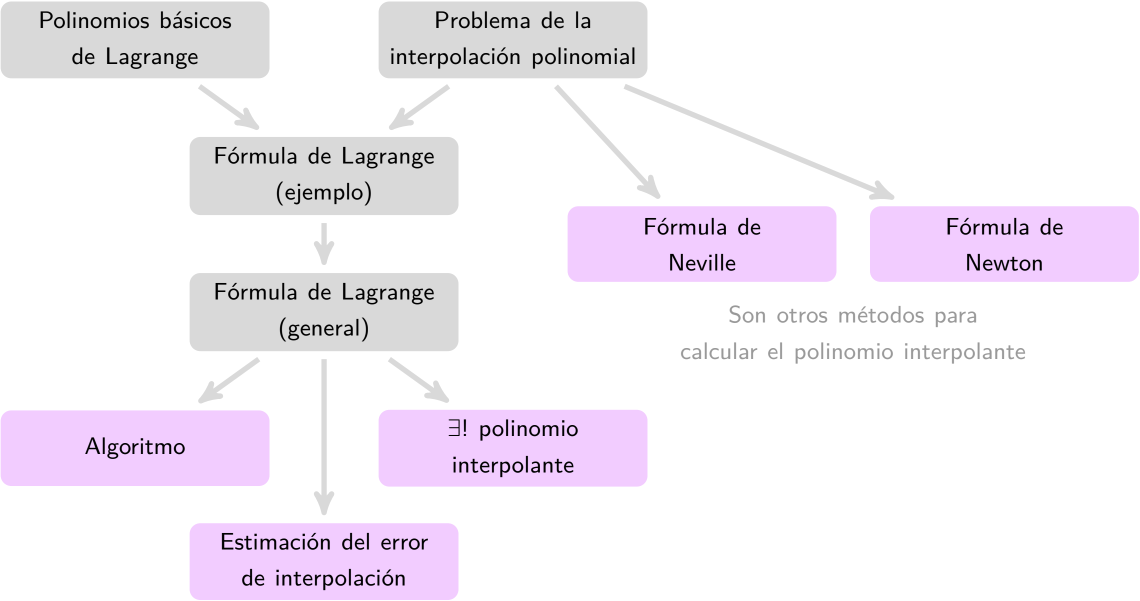
- $+$ Es directa (explícita, no recursiva) y simple:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

- $+$ Sirve para estimar el error de la interpolación

- $-$ Requiere muchas operaciones aritméticas


Polinomios básicos de Lagrange
Problema de la interpolación polinomial
Fórmula de Lagrange (ejemplo)
Fórmula de Lagrange (general)
Algoritmo
∃! polinomio interpolante
Estimación del error de interpolación


Polinomios básicos de Lagrange
Problema de la interpolación polinomial
Fórmula de Lagrange (ejemplo)
Fórmula de Neville
Fórmula de Newton
Fórmula de Lagrange (general)
Son otros métodos para calcular el polinomio interpolante
Algoritmo
∃! polinomio interpolante
Estimación del error de interpolación