Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Objetivos. Enunciar el problema de EDO con condición inicial (problema de Cauchy). Reducir este problema a una ecuación integral.

1. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, sea $f\colon D \to \mathbb{R}$, y sea $(t_0, x_0) \in D$. Se busca un intervalo $[\alpha, \beta]$ tal que $t_0 \in [\alpha, \beta]$ y una función derivable $x\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ tal que

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (t \in [\alpha, \beta]), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Para cada punto (t, x) el valor $f(t, x)$ determina el vector $(1, f(t, x))$, así que la función f determina un campo vectorial. Tratamos los vectores $(1, f(t, x))$ como direcciones en el plano.

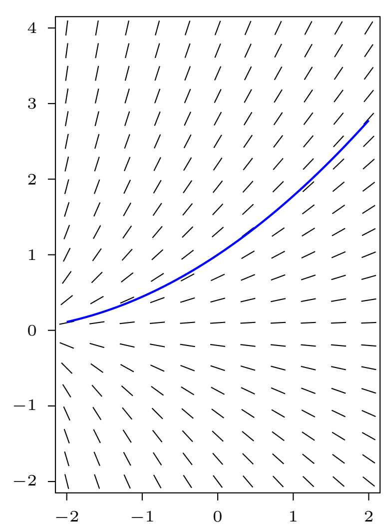
2. Ejemplo. La función

$$x(t) = \frac{1}{9}(3 + t)^2$$

es una solución del problema (1) con

$$f(t, x) = \frac{2x}{3 + t}, \qquad t_0 = 0, \qquad x_0 = 1.$$

El dibujo muestra el campo de las direcciones y la solución del problema (1).



3. Relación con una ecuación integral. El problema (1) es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\,du. \tag{2}$$

La forma integral es útil para demostrar teoremas de existencia y unicidad de la solución.

4. Teorema de Peano sobre la existencia de una solución del problema de Cauchy (sin demostración). Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $f \in C(D, \mathbb{R})$ y $(t_0, x_0) \in D$. Entonces existe una vecindad U del punto t_0 y una función $x\colon U \to \mathbb{R}$ tales que

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (t \in U), \qquad x(t_0) = x_0.$$

La solución no necesariamente es única.

5. Ejemplo de no unicidad. En el teorema de Peano no se garantiza la unicidad, y hay ejemplos de problemas que tienen soluciones múltiples. Por ejemplo, el problema

$$x'(t) = \operatorname{sgn}(x(t))\sqrt{|x(t)|}, \qquad x(0) = 0,$$

tiene dos soluciones: una es la constante 0, otra es la función $x(t) = t^2$.

6. Teorema de Cauchy–Lipschitz–Picard–Lindelöf sobre la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy. Si f es una función Lipschitz continua respecto al segundo argumento, entonces se garantiza la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy, en un intervalo alrededor de t_0.

7. Teorema de Cauchy–Lipschitz–Picard–Lindelöf, en el caso cuando el dominio es una franja. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$, $D = A \times \mathbb{R}$, $(t_0, x_0) \in D$, $f \in C(D, \mathbb{R})$ y $L \geq 0$. Supongamos que para cualesquiera $t \in A$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|. \tag{3}$$

Entonces existe una única función $x\colon A \to \mathbb{R}$ tal que

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (t \in A), \qquad x(t_0) = x_0.$$