Acotar el error global a partir de una cota local

Objetivos. Estamos estudiando métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. El objetivo de esta sección es acotar el error global a partir de una cota local.

1. Lema para pasar de una cota recursiva a una cota directa (repaso). Sean $c \in \mathbb{R}$, $b > 1$, y sea $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $a_0 = 0$ y

$$a_{k+1} \leq c + b a_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Entonces

$$a_k \leq c \frac{b^k - 1}{b - 1}. \tag{1}$$

2. Estabilidad de la solución del problema de Cauchy (repaso). Sean A un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, $L = \operatorname{diam}(A)$, $f \in C(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $K > 0$ tal que

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq K|u - v| \qquad (t \in A,\ u, v \in \mathbb{R}).$$

Para cada (t_0, x_0) en $A \times \mathbb{R}$ denotemos por x_{t_0,x_0} a la solución del problema de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$. Ya hemos demostrado que para cualesquiera t_0 en A, u, v en $\mathbb{R}$ y $h > 0$ tal que $t_0 + h \in A$,

$$|x_{t_0,u}(t_0 + h) - x_{t_0,v}(t_0 + h)| \leq |u - v|\, e^{Kh}. \tag{2}$$

3. Ejemplos de métodos de un paso (repaso). En las clases pasadas ya conocimos varios métodos directos de un paso que proponen una aproximación de la solución en el punto $t + h$ usando el valor v en el punto t. Por ejemplo, en el método de Euler se usa la regla

$$S(t, v, h) = v + hf(t, v),$$

y en el método de Heun (se conoce también como un método de Runge–Kutta de segundo orden)

$$S(t, v, h) = v + \frac{h}{2}\big(f(t, v) + f(t + h, v + hf(t, v))\big).$$

Algunos autores prefieren escribir $S(t, v, h)$ en la forma

$$v + h\Psi(t, v, h).$$

En esta representación la función Ψ sirve como una aproximación de la pendiente de la secante y se conoce como la *función de incremento.*

4. Teorema (cota global del error a partir de una cota del error de truncamiento local). Sean A un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, $L = \operatorname{diam}(A)$, $f \in C(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $K > 0$ tal que

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le K|u - v| \qquad (t \in A,\ u, v \in \mathbb{R}).$$

Para cada (t_0, x_0) en $A \times \mathbb{R}$ denotemos por x_{t_0,x_0} a la solución del problema de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$. Sea $S \in C(A \times \mathbb{R} \times (0, +\infty))$ una función que para cada terna (t_0, x_0, h) da una aproximación $S(t_0, x_0, h)$ del número $x_{t_0,x_0}(t_0 + h)$, y para cada $h > 0$ existe un número ε_h que

$$|S(t_0, x_0, h) - x_{t_0,x_0}(t_0 + h)| \le \varepsilon_h. \tag{3}$$

Sean $t_0 \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ y $n \in \mathbb{N}_1$ tales que $t_0 + nh \in A$. Pongamos $t_j = t_0 + jh$ para cada j en $\{0, \ldots, n\}$, y definimos $v_0, \ldots, v_n$ mediante la regla

$$v_0 \coloneqq x_0, \qquad v_{j+1} \coloneqq S(t_j, v_j, h).$$

Entonces

$$\max_{0 \le j \le n} |v_j - x_{t_0,x_0}(t_j)| \le \frac{\varepsilon_h}{h} \frac{e^{LK} - 1}{K}. \tag{4}$$

Demostración. Denotemos x_{t_0,x_0} por x. Sea j en $\{1, \ldots, n-1\}$. Entonces

$$|v_{j+1} - x(t_{j+1})| \le |S(t_j, v_j, h) - x_{t_j,v_j}(t_j + h)| + |x_{t_j,v_j}(t_j + h) - x(t_j + h)|.$$

El primer sumando se puede acotar por (3):

$$|S(t_j, v_j, h) - x_{t_j,v_j}(t_j + h)| \le \varepsilon_h. \tag{5}$$

Para acotar el segundo sumando, aplicamos el teorema de estabilidad. Notamos que la función x pasa por el punto $(t_j, x(t_j))$, y la función x_{t_j,v_j} pasa por el punto (t_j, v_j). Aplicamos (2) con t_j en vez de t_0:

$$|x_{t_j,v_j}(v_j + h) - x(v_j + h)| \le |v_j - x(t_j)|\, e^{Kh}. \tag{6}$$

Combinando (5) con (6) obtenemos

$$|v_{j+1} - x(t_{j+1})| \le \varepsilon_h + e^{Kh} |v_j - x(t_j)|.$$

Aplicamos el Lema 1 con $a_j = |v_j - x(t_j)|$, $c = \varepsilon_h$ y $b = e^{Kh}$. Entonces para cada j obtenemos

$$|v_j - x(t_j)| \le \varepsilon_h \frac{e^{Kjh} - 1}{e^{Kh} - 1}.$$

La expresión e^{Kjh} alcanza su valor máximo, cuando $j = n$. Para el denominador aplicamos la cota $e^{Kh} \ge 1 + Kh$. Entonces

$$|v_j - x(t_j)| \le \frac{\varepsilon_h}{h} \frac{e^{LK} - 1}{K}. \qquad \square$$

5. Definición: método de orden p. Se dice que un método para resolver ODE con condiciones iniciales es de orden p, si para cada f bastante suave existe un número $C > 0$ tal que las aproximaciones calculadas con este método satisfacen

$$\max_{0 \le j \le n} |v_j - x_{t_0,x_0}(t_j)| \le C h^p,$$

es decir, el error global es de orden $O(h^p)$.

6. El orden del error local y el orden del error global. El las condiciones del teorema, si $\varepsilon_h \le C_1 h^{p+1}$, entonces para el global obtenemos una cota superior de la forma $C_2 h^p$, y el método es de orden p.

7. Teorema (una cota del error de truncamiento local en el método de Euler). Sean A un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, $f \in C(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Supongamos que f es absolutamente acotada por un número M:

$$|f(t, v)| \le M \qquad (t \in A,\ v \in \mathbb{R}),$$

y que existen $K_1, K_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |f(t_1, v) - f(t_2, v)| &\le K_1 |t_1 - t_2| \qquad (t_1, t_2 \in A,\ v \in \mathbb{R}); \\ |f(t, v_1) - f(t, v_2)| &\le K_2 |v_1 - v_2| \qquad (t \in A,\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Para cualquier terna $(t, v, h) \in A \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ tal que $t + h \in A$, pongamos

$$S(t, v, h) \coloneqq v + h f(t, v),$$

y para cualquier par $(t, v) \in A \times \mathbb{R}$ denotamos por $x_{t,v}$ a la solución exacta del problema de Cauchy $x'(s) = f(s, x(s))$ con la condición inicial $x(t) = v$. Entonces

$$|S(t, v, h) - x_{t,v}(t + h)| \le \frac{K_1 + M K_2}{2} h^2. \tag{7}$$

Demostración. Denotamos $x_{t,v}$ por x. Escribimos $x(u)$ en la forma integral:

$$x(u) = v + \int_t^u f(s, x(s))\, ds. \tag{8}$$

Como f es absolutamente acotada por M, la fórmula (8) implica que la función x es Lipschitz continua con el coeficiente M:

$$|x(u) - x(t)| \le M |u - t|. \tag{9}$$

Ahora escribimos $S(t,v,h)$ en la forma integral, como una integral de una constante:

$$S(t,v,h) = v + \int_t^{t+h} f(t,v)\,ds. \tag{10}$$

Acotamos la resta de las expresiones (8) y (10):

$$|S(t,v,h) - x(t+h)| \le \int_t^{t+h} |f(t,v) - f(s,x(s))|\,ds.$$

Dentro de la integral usamos la cota

$$\begin{aligned} |f(s,x(s)) - f(t,v)| &\le |f(s,x(s)) - f(t,x(s))| + |f(t,x(s)) - f(t,v)| \\ &\le K_1(s-t) + K_2 M(s-t). \end{aligned}$$

Integrando de t a $t+h$ obtenemos (7). □

8. Corolario (una cota global del error en el método de Euler). En las condiciones del teorema anterior, denotemos por L a la longitud del intervalo A, y supongamos que $t_0 \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ y $n \in \mathbb{N}_1$ tales que $x_0 + nh \in A$. Pongamos $x_j = x_0 + jh$ para cada j en $\{0,\ldots,n\}$, y definimos $v_0,\ldots,v_n$ mediante la regla

$$v_0 \coloneqq x_0, \qquad v_{j+1} \coloneqq S(t_j, v_j, h) = v_j + h f(t_j, v_j).$$

Entonces

$$\max_{0\le j\le n} |v_j - x_{t_0,x_0}(t_j)| \le \frac{1}{2}\left(\frac{K_1}{K_2} + M\right)\left(e^{LK} - 1\right) h. \tag{11}$$