Método de diferencias finitas para problemas de frontera lineales sobre un intervalo

1. Problema de frontera. Consideremos el problema de frontera con una EDO lineal de segundo orden y con condiciones de frontera de tipo Dirichlet:

$$\begin{aligned} x''(t) &= u(t)x(t) + v(t)x'(t) + w(t) \qquad (a \le t \le b), \\ x(a) &= A, \\ x(b) &= B. \end{aligned} \tag{1}$$

Se supone que las funciones dadas u, v, w son de clase $C([a, b])$.

2. Malla uniforme con nodos equidistantes. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales. Cada parte es de longitud

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Denotemos por t_j a los nodos correspondientes:

$$t_j = a + jh \qquad (0 \le j \le n).$$

Notamos que

$$t_j + h = t_{j+1}, \qquad t_j - h = t_{j-1}.$$

3. Aproximación de las derivadas por diferencias divididas. Usamos las siguientes fórmulas para aproximar x' y x'':

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1})}{2h} + O(h^2),$$

$$x''(t_j) = \frac{x(t_{j-1}) - 2x(t_j) + x(t_{j+1})}{h^2} + O(h^2).$$

Denotemos por X_j al valor aproximado de la función x en el punto t_j, y pongamos $U_j = u(t_j)$, $V_j = v(t_j)$, $W_j = w(t_j)$. Formamos un sistema de ecuaciones para las incógnitas X_j, omitiendo los residuos $O(h^2)$:

$$\frac{X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}}{h^2} = U_j X_j + V_j \frac{X_{j+1} - X_{j-1}}{2h} + W_j.$$

Multiplicamos ambos lados por $-h^2$ y pasamos los términos incógnitos al lado izquierdo:

$$-\left(1 + \frac{hV_j}{2}\right) X_{j-1} + (2 + h^2 U_j) X_j - \left(1 - \frac{hV_j}{2}\right) X_{j+1} = -h^2 W_j. \tag{2}$$

Las condiciones de frontera se convierten en $X_0 = A$, $X_n = B$. Excluimos X_0 de la ecuación (2) con $j = 1$:

$$+(2 + h^2 U_1) X_1 - \left(1 - \frac{hV_1}{2}\right) X_2 = -h^2 W_1 + \left(1 + \frac{hV_1}{2}\right) A. \tag{3}$$

Excluimos X_n de la ecuación (2) con $j = n - 1$:

$$-\left(1 + \frac{hV_{n-1}}{2}\right) X_{n-2} + (2 + h^2 U_{n-1}) X_{n-1} = -h^2 W_{n-1} + \left(1 - \frac{hV_{n-1}}{2}\right) B. \tag{4}$$

4. El sistema de ecuaciones en forma matricial. Para $n = 7$, escribimos las ecuaciones (3), (2) con $j = 2, 3, 4, 5$ y (4) en forma matricial:

$$MX = R,$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} 2 + h^2 U_1 & -1 + \dfrac{hV_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 - \dfrac{hV_2}{2} & 2 + h^2 U_2 & -1 + \dfrac{hV_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \dfrac{hV_3}{2} & 2 + h^2 U_3 & -1 + \dfrac{hV_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \dfrac{hV_4}{2} & 2 + h^2 U_4 & -1 + \dfrac{hV_4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \dfrac{hV_5}{2} & 2 + h^2 U_5 & -1 + \dfrac{hV_5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 - \dfrac{hV_6}{2} & 2 + h^2 U_6 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} -h^2 W_1 + \left(1 + \dfrac{hV_1}{2}\right) A \\ -h^2 W_2 \\ -h^2 W_3 \\ -h^2 W_4 \\ -h^2 W_5 \\ -h^2 W_6 + \left(1 - \dfrac{hV_6}{2}\right) B \end{bmatrix}.$$