Lista de temas del segundo examen parcial de Análisis Numérico III

Problema del valor inicial para EDO

Los temas que no estaban incluidos en el primer examen parcial:

1. Deducir coeficientes en los métodos de Adams–Bashforth y demostrar cotas superiores del error de truncamiento local.

2. Programar los métodos de Adams–Bashforth.

El siguiente tema viene de manera implícita:

3. Para entender bien el método de disparo, hay que entender de manera muy clara cómo un problema del valor inicial de segundo orden:

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \qquad x(t_0) = a, \qquad x'(t_0) = b,$$

se convierte en un problema de la forma

$$X'(t) = F(t, X(t)), \qquad X(t_0) = A,$$

para una función vectorial X.

Análisis del problema de frontera con la función de Green

4. Mostrar que el problema de frontera $x''(t) = f(t)$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, se resuelve por medio de una fórmula integral que involucra cierta función G llamada *la función de Green*.

5. Programar una función que realice el método del problema anterior. Para la integración numérica usar el método de los trapecios.

6. Mostrar que el problema de frontera $x''(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, es equivalente al problema del punto fijo para cierto operador integral.

7. Usando el resultado del problema anterior mostrar que bajo ciertas condiciones (suficientes) el problema de frontera tiene una única solución.

El método de disparo

8. Explicar el método de disparo para resolver los problemas de frontera lineales:

$$x''(t) = u(t)x(t) + v(t)x'(t) + w(t), \qquad x(\alpha) = a, \qquad x(\beta) = b.$$

9. En algún lenguaje de programación escribir una función que realice el método del problema anterior. Suponer que está dada una función que realiza algún método de Runge–Kutta para funciones vectoriales.

10. Explicar el método de disparo para resolver problemas de frontera, no necesariamente lineales. En algún lenguaje de programación escribir una función que realice este método, suponiendo que están dadas una función que realiza algún método de Runge–Kutta para funciones vectoriales y una función que realiza el método de bisección.

Los métodos de diferencias finitas

11. Deducir las fórmulas centrales de diferencias finitas para $f'(t)$ y $f''(t)$, usando un vecino del lado izquierdo y un vecino del lado derecho:

$$f'(t) = \frac{???\,f(t+h) + ???\,f(t) + ???\,f(t-h)}{h^{???}} + O(t^{???}),$$
$$f''(t) = \frac{???\,f(t+h) + ???\,f(t) + ???\,f(t-h)}{h^{???}} + O(t^{???}).$$

12. Deducir una fórmula que aproxime $f''(t)$ usando dos vecinos del lado izquierdo y dos del lado derecho:

$$f''(t) = \frac{\alpha\,f(t-2h) + \beta f(t-h) + \gamma f(t) + \beta f(t+h) + \alpha\,f(t+2h)}{h^{???}} + O(t^{???}).$$

13. Usando aproximaciones de derivadas por diferencias finitas llevar el problema de frontera

$$x''(t) = u(t)x(t) + v(t)x'(t) + w(t), \qquad x(0) = A, \qquad x(1) = B,$$

a un sistema de ecuaciones lineales con una matriz tridiagonal.

14. En algún lenguaje de programación escribir una función que realice el método del problema anterior. Por ejemplo, en el lenguaje Matlab/Octave se recomienda trabajar con matrices dispersas y usar el comando `x = M \ b` para resolver el sistema $Mx = b$.

15. Usando aproximaciones de derivadas por diferencias finitas llevar el problema de frontera

$$x''(t) = w(t), \qquad x(0) = A, \qquad x(1) = B,$$

a un sistema de ecuaciones lineales. Para los nodos interiores usar la fórmula (12), para el nodo izquierdo la fórmula

$$f''(t) \approx -\frac{-11f(t-h) + 20f(t) - 6f(t+h) - 4f(t+2h) + f(t+3h)}{12h^2},$$

y para el nodo derecho una fórmula similar

$$f''(t) \approx -\frac{-11f(t+h) + 20f(t) - 6f(t-h) - 4f(t-2h) + f(t-3h)}{12h^2},$$

16. En algún lenguaje de programación escribir una función que realice el método del problema anterior. Por ejemplo, en el lenguaje Matlab/Octave se recomienda trabajar con matrices dispersas y usar el comando `x = M \ b` para resolver el sistema $Mx = b$.