Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico III.
Examen parcial II. Variante α.

Solución numérica de EDO con valores de frontera.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito 2	proyecto especial 2	partici- pación 2	parcial 2

El examen dura solamente 80 minutos.

Problema 1. *25 %.*
Encuentre coeficientes b_1 y b_2 tales que el **método de Adams–Bashforth**

$$v_k = v_{k-1} + b_1 h f(t_{k-1}, v_{k-1}) + b_2 h f(t_{k-2}, v_{k-2})$$

tenga un error de truncamiento local de orden $O(h^3)$, suponiendo que la función f del lado derecho de la ODE y sus derivadas parciales de órdenes $\leqslant 2$ son continuas y acotadas.

Problema 2. *20 %.*
Explicar de manera muy breve el **método de disparo para resolver los problemas de frontera lineales** de la siguiente forma:

$$X''(t) = U(t)X(t) + V(t)X'(t) + W(t), \qquad X(a) = A, \qquad X(b) = B.$$

I. Transformar esta ecuación de segundo orden con dos condiciones iniciales $X(a) = A$, $X'(a) = p$, en una ecuación vectorial de primer orden con un valor inicial.

II. Enunciar los problemas de Cauchy que se propone resolver y explicar cómo obtener luego una solución del problema original; justificar la función propuesta realmente resuelve el problema original.

Problema 3. *25 %.*
En algún lenguaje de programación escribir una función que realice el **método de disparo para problemas de frontera lineales**, el cual se debe explicar y justificar en el problema anterior. Los argumentos de la función son `U`, `V`, `W` (apuntadores a funciones), `a`, `b`, `A`, `B`, `n`. Se supone que ya está dada una función `rk4method` que realiza algún método de Runge–Kutta de orden 4 para funciones vectoriales.

Problema 4. *15 %.*
Utilizando la fórmula de Taylor deducir fórmulas del siguiente tipo para aproximar derivadas por diferencias finitas:

$$f'(t) = \frac{???\, f(t+h) + ???\, f(t+h)}{???\, h^{???}} + O(h^{???}), \quad f''(t) = \frac{???\, f(t+h) + ???\, f(t) + ???\, f(t+h)}{???\, h^{???}} + O(h^{???}).$$

Es suficiente proponer (recordar) las fórmulas y justificar (deducir) el orden del término residuo.

Problema 5. *20 %.*
Usando una de las fórmulas del problema anterior explique brevemente el **método de diferencias finitas** para resolver problemas de frontera de la forma

$$X''(t) = U(t)X(t) + W(t), \qquad X(0) = A, \qquad X(1) = B.$$

Se propone dividir el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos iguales. Explique qué vector se busca en vez de la función X y escriba el sistema de ecuaciones lineales, de preferencia para $n = 6$.

Problema 6. *25 %.*
En algún lenguaje de programación escribir una función que realice el método explicado en el inciso anterior. Se supone que ya está dada una función o una operación del lenguaje elegido que resuelve sistemas de ecuaciones lineales.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico III.
Examen parcial II. Variante β.

Solución numérica de EDO con valores de frontera.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito 2	proyecto especial 2	partici-pación 2	parcial 2

El examen dura solamente 80 minutos.

Problema 1. *25 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función `ab3` que realice el **método de Adams–Bashforth** directo con tres puntos previos. Se sabe que los coeficientes del método son los siguientes (b_1 corresponde al punto previo más cercano):

$$b_1 = \frac{23}{12}, \qquad b_2 = -\frac{4}{3}, \qquad b_3 = \frac{5}{12}.$$

Los argumentos de la función son un apuntador `f` a la función que determina el lado derecho de la ecuación, los extremos del intervalo `tmin` y `tmin`, el valor inicial `x0` y el número de las partes `n`. Se supone que ya está dada una función `rk4step` que realiza un paso de algún método de Runge–Kutta de orden 4.

Problema 2. *20 %.*
Deduzca una fórmula integral de la forma

$$X(t) = \int_0^1 G(t,s)F(s)\,ds$$

para la solución del problema de frontera $X''(t) = F(t)$, $X(0) = X(1) = 0$.

Problema 3. *25 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelve el problema de frontera mediante la fórmula del problema anterior. Hay que calcular la integral con la fórmula de los trapecios. Los argumentos son F y n. La función debe regresar el vector de los valores (aproximados) de la función X en los puntos $0/n, 1/n, \ldots, n/n$.

Problema 4. *15 %.*
Utilizando la fórmula de Taylor deducir una fórmula del siguiente tipo para aproximar la segunda derivada por diferencias finitas:

$$f''(t) = \frac{\alpha f(t-2h) + \beta f(t-h) + \gamma f(t) + \beta f(t+h) + \alpha f(t+2h)}{h^2} + O(h^4).$$

Tratar α, β, γ como parámetros incógnitos, formar un sistema de ecuaciones para estas incógnitas y resolverlo.

Problema 5. *20 %.*
Explique brevemente el **método de diferencias finitas** que utiliza cinco nodos en cada ecuación, para aproximar la solución del problema de frontera de la forma

$$X''(t) = F(t), \qquad X(0) = 0, \qquad X(1) = 0.$$

Usar la fórmula del problema anterior para los nodos lejanos de la frontera, la fórmula

$$X''(t) \approx -\frac{-11X(t-h) + 20X(t) - 6X(t+h) - 4X(t+2h) + X(t+3h)}{12h^2}$$

para aproximar $X''(1/n)$ y una fórmula similar, con $-h$ en vez de h, para aproximar $X''((n-1)/n)$. Explique qué vector se busca en vez de la función X y escriba el sistema de ecuaciones lineales en la forma matricial, de preferencia para $n = 8$ o $n = 10$.

Problema 6. *25 %.*
En algún lenguaje de programación escribir una función que realice el método explicado en el inciso anterior. Se supone que ya está dada una función o una operación del lenguaje elegido que resuelve sistemas de ecuaciones lineales.