Disigualdad discreta de Grönwall

Objetivos. Demostrar la desigualdad discreta de Grönwall.

1. Fórmula recursiva para productos. Sea $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de números. Para cada j en $\mathbb{N}_0$ denotemos por d_j al producto

$$d_j \coloneqq \prod_{k=0}^{j} (1 + b_k).$$

Entonces para cada j en $\mathbb{N}_0$

$$d_j = 1 + \sum_{k=0}^{j} b_k d_{k-1}.$$

Demostración. Notamos que $d_{-1} = 1$ y que la última fórmula es válida para $j = 0$. Verifiquemos el paso de inducción.

$$1 + \sum_{k=0}^{j+1} b_k d_{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{j} b_k d_{k-1} + b_{j+1} d_j = d_j + b_{j+1} d_j = d_j (1 + b_{j+1}) = d_{j+1}. \qquad \square$$

2. Proposición (desigualdad discreta de Grönwall). Sea $c \geq 0$ y sean $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ y $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ sucesiones en $[0, +\infty)$ tales que

$$a_j \leq c + \sum_{k=0}^{j-1} a_k b_k \qquad (j \in \mathbb{N}_0).$$

Entonces

$$a_j \leq c \prod_{k=0}^{j-1} (1 + b_k) \leq c \exp\left(\sum_{k=0}^{j-1} b_k \right) \qquad (j \in \mathbb{N}_0).$$

Demostración. Denotemos $\prod_{k=0}^{j} b_k$ por d_j y demostremos por inducción la desigualdad

$$a_j \leq c d_{j-1}.$$

La base es obvia ($a_0 \leq c$). Verifiquemos el paso de inducción:

$$a_{j+1} \leq c + \sum_{k=0}^{j} a_k b_k \leq c + \sum_{k=0}^{j} c d_{k-1} b_k = c \left(1 + \sum_{k=0}^{j} d_{k-1} b_k \right) = c d_j.$$

Finalmente, de la desigualdad elemental $1 + x \leq e^x$ $(x \geq 0)$ obtenemos

$$\prod_{k=0}^{j-1} (1 + b_k) \leq \exp\left(\sum_{k=0}^{j-1} b_k \right). \qquad \square$$