Interpolación segmentaria cúbica (splines cúbicos)

Objetivos. Deducir fórmulas para calcular coeficientes del interpolante segmentario cúbico que pasa por puntos dados.

Requisitos. Derivada por la izquierda y por la derecha en un punto, sistemas de ecuaciones lineales, solución de sistemas de ecuaciones lineales con matrices tridiagonales, matrices estrictamente diagonal dominantes por renglones.

1. Numeración de puntos. En estos apuntes numeramos los puntos con índices de 1 a n, para facilitar la programación en Matlab (o GNU Octave), Julia y Wolfram Mathematica.

2. Definición. El *interpolante segmentario cúbico* (o *trazador cúbico*, o *spline cúbico*) correspondiente a los puntos $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ y los valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$, es una función S definida en $[x_1, x_n]$ que tiene las siguientes propiedades:

1. Para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, la restricción $S_j = S|_{[x_j, x_{j+1}]}$ es un polinomio cúbico:
$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \qquad \forall x \in [x_j, x_{j+1}].$$
2. $S(x_j) = y_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, esto es
$$S_j(x_j) = y_j \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}. \tag{1}$$
y
$$S_j(x_{j+1}) = y_{j+1} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}. \tag{2}$$
3. $S \in C^2[x_1, x_n]$. Esto significa que para todo $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ la derivada izquierda de la función S en el punto x_{j+1} coincide con la derivada derecha en el mismo punto:
$$S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}) \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n-2\}, \tag{3}$$
y la segunda derivada izquierda en el punto x_{j+1} coincide con la segunda derivada derecha en este punto:
$$S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1}) \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n-2\}. \tag{4}$$
4. Se cumple una de las siguientes condiciones de frontera:
   - *frontera libre* o *frontera natural*, *splines cúbicos naturales*:
$$S''_0(x_1) = S''_{n-1}(x_n) = 0; \tag{5}$$

- *frontera sujeta*:
$$S'(x_1) = \alpha, \qquad S'(x_n) = \beta, \tag{6}$$
donde α y β son números dados.

3. Observación: el número de los coeficientes incógnitos es igual al número de las condiciones. El número total de los coeficientes incognitos a_j, b_j, c_j, d_j es $4n-4$, y el número de las condiciones es igual a

$$\underbrace{n-1}_{(1)} \;+\; \underbrace{n-1}_{(2)} \;+\; \underbrace{n-2}_{(3)} \;+\; \underbrace{n-2}_{(4)} \;+\; \underbrace{2}_{(5)\text{ o }(6)} \;=\; 4n-4.$$

4. Teorema (existencia y unicidad del interpolante segmentario cúbico natural). Dados puntos $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ y valores $y_1, \ldots, y_n$, siempre existe un único interpolante segmentario cúbico natural que corresponde a estos puntos y valores.

5. Construcción de trazadores cúbicos. Vamos a analizar el sistema de condiciones y reducirlo a un sistema de ecuaciones lineales con una matriz estrictamente diagonal dominante y por eso invertible.

1. La condición (1) implica que $a_j = y_j$.

2. Es cómodo extender (3) y (4) al caso $j = n-1$. La condición de la frontera $S''(x_n) = 0$ significa que $c_n = 0$.

3. Denotemos $x_{j+1} - x_j$ por h_j. Usando la condición (4) (sobre las segundas derivadas), despejamos d_j:
$$d_j = \frac{1}{3h_j}\,(c_{j+1} - c_j) \qquad (j \in \{1, \ldots, n-1\}) \tag{7}$$

4. Escribamos la condición (2) y sustituimos d_j por la expresión (7):
$$y_{j+1} = y_j + b_j h_j + \frac{1}{3}(2c_j + c_{j+1})h_j^2.$$
Despejemos b_j:
$$b_j = \frac{1}{h_j}\,(y_{j+1} - y_j) - \frac{h_j}{3}\,(2c_j + c_{j+1})\,. \tag{8}$$

5. Escribamos la condición (3):
$$b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_{j+1}.$$
Sustituyamos d_j por la expresión (7):
$$b_j + (c_{j+1} + c_j)h_j = b_{j+1}.$$

Cambiamos el índice j por $j-1$:

$$b_{j-1} + (c_j + c_{j-1})h_{j-1} = b_j.$$

Sustituyamos b_j por la expresión (8):

$$\frac{1}{h_{j-1}}\,(y_j - y_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}\,(2c_{j-1} + c_j) + (c_j + c_{j-1})h_{j-1} = \frac{1}{h_j}\,(y_{j+1} - y_j) - \frac{h_j}{3}\,(2c_j + c_{j+1})\,.$$

Multipliquemos por 3:

$$h_j\,(2c_j + c_{j+1}) - h_{j-1}\,(2c_{j-1} + c_j) + 3h_{j-1}(c_j + c_{j-1}) = \frac{3}{h_j}\,(y_{j+1} - y_j) - \frac{3}{h_{j-1}}\,(y_j - y_{j-1})\,.$$

Simplifiquemos:

$$\boxed{h_{j-1}c_{j-1} + (2h_{j-1} + 2h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}\,(y_{j+1} - y_j) - \frac{3}{h_{j-1}}\,(y_j - y_{j-1})\,.} \tag{9}$$

Las condiciones de frontera libre significan que $c_0 = 0$ y $c_n = 0$. Para $n = 5$, el sistema tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2h_1 + 2h_2 & h_2 & 0 & 0 \\ h_2 & 2h_2 + 2h_3 & h_3 & 0 \\ 0 & h_3 & 2h_3 + 2h_4 & h_4 \\ 0 & 0 & h_4 & 2h_4 + 2h_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(y_3-y_2)}{h_2} - \frac{3(y_2-y_1)}{h_1} \\ \frac{3(y_4-y_3)}{h_3} - \frac{3(y_3-y_2)}{h_2} \\ \frac{3(y_5-y_4)}{h_4} - \frac{3(y_4-y_3)}{h_3} \\ \frac{3(y_6-y_5)}{h_5} - \frac{3(y_5-y_4)}{h_4} \end{bmatrix}.$$

La matriz del sistema es *estrictamente diagonal dominante*. Es significa que en cada renglón el valor absoluto de la entrada diagonal es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de las demás entradas. Por lo tanto, el sistema tiene una solución única y se resuelve al aplicar el método de Gauss con pivotes diagonales.

6. Ejercicio. Escriba el sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes c_2, c_3, c_4, que corresponde a los puntos

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5$$

y los valores

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 5, \quad y_5 = 2.$$

7. El último trozo del interpolador segmentario cúbico. Es cómodo pensar que en el segmento degenerado $[x_n, x_n]$ la función S está definida como la constante y_n:

$$S(t) = y_n = y_n + 0(t - x_n) + 0(t - x_n)^2 + 0(t - x_n)^3 \qquad (t \in [x_n, x_n]),$$

y los coeficientes correspondientes son $a_n = y_n$, $b_n = c_n = d_n = 0$.

8. Programación. Escriba una función `createcubicspline` con argumentos x, y que calcule los vectores de coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ y regrese los vectores x, a, b, c, d como una matriz o como una lista de listas. Use la función `solvetridiagn` que resuelve sistemas de ecuaciones lineales tridiagonales.

9. Programación. Escriba una función `evalcubicspline` con argumentos M, p que calcule los valores del interpolante segmentario cúbico natural en los puntos dados $p_1, \ldots, p_m$. Aquí M es una matriz o una lista de listas que consiste de los vectores x, a, b, c, d.