Solución de un caso particular del problema de valor de frontera en términos de la función de Green sobre un intervalo

Objetivos. Mostrar que un caso muy especial del problema de valor de frontera:

$$x''(t) = f(t), \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 0,$$

se puede resolver por medio de una función de Green que corresponde a este problema. Demostrar la existencia y unicidad de solución del problema de frontera

$$x''(t) = f(t, x(t)), \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 0,$$

donde f es Lipschitz continua respecto al segundo argumento, y el coeficiente de Lipschitz es menor que 8.

1. Un caso muy especial del problema de frontera: buscar una antiderivada de segundo orden que se anule en los extremos. Consideremos el problema de frontera

$$x''(t) = f(t), \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{1}$$

donde $f \in C([0, 1])$. El problema se puede resolver trabajando con la función

$$y(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

y sus integrales, pero busquemos una representación más explícita de la solución.

2. Teorema (representación integral de la antiderivada de segundo orden que se anula en los extremos. Sea $f \in C([0, 1])$. Definimos $G\colon [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$,

$$G(t, s) = \begin{cases} s(t-1), & \text{si} \quad 0 \le s \le t \le 1; \\ t(s-1), & \text{si} \quad 0 \le t \le s \le 1. \end{cases} \tag{2}$$

Entonces el problema (1) tiene una única solución, la cual se puede escribir en la siguiente forma:

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)\, f(s)\, ds, \tag{3}$$

esto es,

$$x(t) = \int_0^t (t-1)s\, f(s)\, ds + \int_t^1 t(s-1) f(s)\, ds. \tag{4}$$

Demostración. 1. Obviamente (4) es equivalente a (3). Deduzcamos (4) suponiendo que x es una solución del problema (1). Como $x''(t) = f(t)$, por el teorema fundamental de cálculo tenemos

$$x'(u) = \int_0^u x''(s)\,ds + x'(0) = \int_0^u f(s)\,ds + x'(0).$$

Denotemos $x'(0)$ por C, entonces

$$x'(u) = \int_0^u f(s)\,ds + C.$$

Otra vez aplicamos el teorema fundamental de cálculo, ahora tomamos en cuenta que $x(0) = 0$:

$$x(t) = \int_0^t x'(u)\,du = \int_0^t \int_0^u f(s)\,ds\,du + Ct.$$

La integral doble se toma sobre el conjunto

$$\{(u, s) \colon\ 0 \le t \le u,\ 0 \le s \le u\} = \{(u, s) \colon\ 0 \le s \le t,\ s \le u \le t\},$$

así que

$$x(t) = \int_0^t \int_s^t f(s)\,du\,ds + Ct = \int_0^t (t - s)f(s)\,ds + Ct.$$

Ahora aplicamos la condición $x(1) = 0$ y obtenemos

$$C = -\int_0^1 (1 - s)f(s)\,ds = \int_0^1 (s - 1)f(s)\,ds.$$

Sustituyendo y simplificando obtenemos (4): La solución final es

$$x(t) = \int_0^t (t - s)f(s)\,ds + \int_0^1 t(s - 1)f(s)\,ds = \int_0^t (t - 1)s\,f(s)\,ds + \int_t^1 t(s - 1)f(s)\,ds.$$

2. Ahora mostremos que la función dada por (3) en efecto es una solución del problema (1). En vez de mostrar que los razonamientos de la primera parte de la demostración son invertibles, hagamos una prueba directa. Primero notamos que para los puntos de la forma $(0, s)$ se aplica el segundo caso de la definición de G, y $G(0, s) = 0$. Para los puntos de la forma $(1, s)$ se aplica el primer caso de la definición de G, y $G(1, s) = 0$. Luego la función x se anula en los puntos 0 y 1:

$$x(0) = x(1) = \int_0^1 0\,ds = 0.$$

La derivada de la función G respecto al primer argumento no es continua, por eso no es fácil justifar que podemos derivar bajo el signo de la integral en (3), y preferimos usar la fórmula (4). Aplicamos el teorema fundamental de cálculo:

$$x'(t) = \int_0^t s\, f(s)\, ds + (t-1)tf(t) + \int_t^1 (s-1)\, f(s)\, ds - t(t-1)f(t).$$

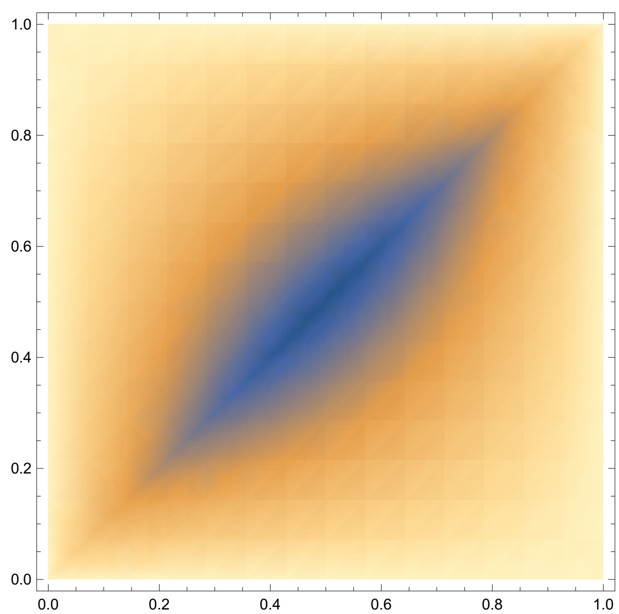
Al simplificar un poco,

$$x'(t) = \int_0^t s\, f(s)\, ds + \int_t^1 (s-1)\, f(s)\, ds.$$

Sacamos la segunda derivada, otra vez aplicando el teorema fundamental de cálculo:

$$x''(t) = tf(t) - (t-1)f(t) = f(t). \qquad \square$$

El Dibujo 1 muestra la gráfica de densidad de la función G.



Dibujo 1: La función G definida por (2). Las partes azules corresponden a los valores negativos con valores absolutos más grandes.

3. Teorema (del problema de frontera a una ecuación integral). Sea $f \in C([0,1] \times \mathbb{R})$. Entonces el problema de frontera

$$x''(t) = f(t, x(t)), \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 0,$$

es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))\,ds. \tag{5}$$

Demostración. Los cálculos son muy similares a la demostración del Teorema 2. Mostremos solamente la segunda parte. Supongamos que x satisface (5). Ya hemos visto que $G(0,s) = G(1,s) = 0$ para cada s en $[0,1]$. Escrimos x en la forma

$$x(t) = (t-1)\int_0^t s\,f(s,x(s))\,ds + t\int_t^1 (s-1)\,f(s,x(s))\,ds.$$

Derivamos aplicando el teorema fundamental de cálculo:

$$x'(t) = \int_0^t s\,f(s,x(s))\,ds + (t-1)tf(t,x(t)) + \int_t^1 (s-1)\,f(s,x(s))\,ds - t(t-1)f(t,x(t)).$$

Al simplificar,

$$x'(t) = \int_0^t s\,f(s,x(s))\,ds + \int_t^1 (s-1)\,f(s,x(s))\,ds.$$

Derivamos otra vez y llegamos al lado derecho de la ecuación original:

$$x''(t) = tf(t,x(t)) - (t-1)f(t,x(t)) = f(t,x(t)).$$ □

4. Teorema sobre la equivalencia del problema de frontera y una ecuación integral. Sea $f \in C([0,1]\times\mathbb{R})$, y existe un $K < 8$ tal que

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le K|u_1 - u_2|.$$

Entonces el problema de frontera

$$x''(t) = f(t,x(t)), \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{6}$$

tiene una única solución.

Demostración. Denotamos por X al espacio vectorial de las funciones x de la clase $C([0,1])$ que satisfacen $x(0) = x(1) = 0$, con la norma-máximo. Consideremos el operador integral $S\colon X \to X$,

$$(Sx)(t) \coloneqq \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))\,ds.$$

Por el Teorema 4, el problema de frontera (6) es equivalente al problema del punto fijo del operador S. Para demostrar la unicidad y existencia de la solución, es suficiente mostrar que la función S es contractiva.

$$|(Sx - Sy)(t)| \le K \int_0^1 |G(t,s)|\,|x(s) - y(s)|\,ds \le K\|x - y\| \int_0^1 |G(t,s)|\,ds.$$

Calculemos la última integral:

$$\begin{aligned} h(t) &\coloneqq \int_0^1 |G(t,s)|\,ds = (1-t)\int_0^t s\,ds + t\int_t^1 (1-s)\,ds \\ &= \frac{(1-t)t^2}{2} + \frac{t(1-t)^2}{2} = \frac{t(1-t)}{2}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que el valor máximo de h es $1/8$, luego

$$\|Sx - Sy\| \le \frac{K}{8}\,\|x - y\|.$$

Si $K < 8$, entonces la función S es contractiva. $\square$