Propiedades de B-splines

Objetivos. Definir el concepto de B-spline y demostrar sus propiedades principales.

1. Definición. Sean $t_1, \ldots, t_n$ algunos números reales tales que

$$t_1 \le \cdots \le t_n.$$

Definimos las funciones $B_{0,1}, \ldots, B_{0,n-1} \colon [t_1, t_n] \to \mathbb{R}$,

$$B_{0,j}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_j, t_{j+1}); \\ 0, & t \notin [t_j, t_{j+1}). \end{cases}$$

Para cada $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ definimos $B_{p,1}, \ldots, B_{p,n-p-1} \colon [t_1, t_n] \to \mathbb{R}$, mediante la siguiente fórmula recursiva (Cox-de Boor):

$$B_{p,j}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+p} - t_j} B_{p-1,j}(t) + \frac{t_{j+p+1} - t}{t_{j+p+1} - t_{j+1}} B_{p-1,j+1}(t). \tag{1}$$

2. Fórmula recursiva usando el cociente $q_{p,j}$. Denotemos por $q_{p,j}$ al cociente

$$q_{p,j}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+p} - t_j}.$$

Entonces la fórmula (1) se puede escribir como

$$B_{p,j}(t) = q_{p,j}(t) B_{p-1,j}(t) + (1 - q_{p,j+1}(t)) B_{p-1,j+1}(t). \tag{2}$$

3. Teorema (partición de la unidad). Para cada p y cada t en $[t_{p+1}, t_{n-p})$,

$$\sum_{j=1}^{n-p-1} B_{p,j}(t) = 1. \tag{3}$$

Demostración. Base de inducción: $p = 0$. En este caso la fórmula es obvia:

$$\sum_{j=1}^{n-1} B_{0,j} = \sum_{j=1}^{n-1} \chi_{[t_j, t_{j+1})} = [t_0, t_n).$$

Paso de inducción. Suponemos que la fórmula es correcta para $p - 1$: para cada $t \in [t_p, t_{n-p+1})$,

$$\sum_{j=1}^{n-p} B_{p-1,j}(t) = 1. \tag{4}$$

Supongamos $t \in [t_{p+1}, t_{n-p})$ y demostremos (3). Por la fórmula recursiva (2),

$$\sum_{j=1}^{n-1} B_{p,j}(t) = \sum_{j=1}^{n-p-1} q_{p,j}(t) B_{p-1,j}(t) + \sum_{j=1}^{n-p-1} (1 - q_{p,j+1}(t)) B_{p-1,j+1}(t).$$

En la última suma hagamos el cambio de variable $k = j + 1$, luego denotamos la variable nueva otra vez como j:

$$\sum_{j=1}^{n-1} B_{p,j}(t) = \sum_{j=1}^{n-p-1} q_{p,j}(t) B_{p-1,j}(t) + \sum_{j=2}^{n-p} (1 - q_{p,j}(t)) B_{p-1,j}(t). \tag{5}$$

Como $t < t_{n-p}$ y $B_{p-1,n-p}$ puede tomar valores no nulos solamente en $[t_{n-p}, t_n)$, obtenemos $B_{p-1,n-p}(t) = 0$ y

$$q_{p,n-p}(t) B_{p-1,n-p}(t) = 0,$$

así que en la primera suma del lado derecho de (5) se puede agregar el sumando con $j = n - p$.

Como $t \geq t_{p+1}$ y $B_{p-1,1}$ puede tomar valores no nulos solamente en $[t_1, t_{p+1})$, obtenemos $B_{p-1,1}(t) = 0$ y

$$(1 - q_{p,1}(t)) B_{p-1,1}(t) = 0,$$

así que en la segunda suma del lado derecho de (5) se puede agregar el sumando con $j = 1$. Por eso podemos transformar (5) de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n-1} B_{p,j}(t) = \sum_{j=1}^{n-p} q_{p,j}(t) B_{p-1,j}(t) + \sum_{j=1}^{n-p} (1 - q_{p,j}(t)) B_{p-1,j}(t) = \sum_{j=1}^{n-p} B_{p-1,j}(t).$$

Aplicando la hipótesis de inducción (4), obtenemos el resultado requerido. $\square$

4. Identidad de Marsden.

$$(u-\tau)^p = \sum_{j=1}^{n-p-1} \psi_{p,j}(\tau) B_{p,j}(u), \tag{6}$$

donde

$$\psi_{p,j}(\tau) = (t_{j+1}-\tau)\cdots(t_{j+p-1}-\tau).$$

Idea de demostración. Idea: $\alpha_j = \psi_{p,j}(\tau)$,

$$\omega_{p,j}(u)\alpha_j = \psi_{p-1,j}(\tau)(u-\tau).$$

$\square$

5. Teorema (descomposición del polinomio en una combinación lineal de B-splines). Sea f un polinomio de grado $\le p$. Entonces para cada u en $[t_{p+1}, t_{n-p})$,

$$f(u) = \sum_j \lambda_{p,j}(f) B_{p,j},$$

donde

$$\lambda_{p,j}(f) = \frac{1}{p!} \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu (D^\nu \psi_{p,j})(\tau)\,(D^{p-\nu} f)(\tau).$$

Aquí el punto τ se puede elegir de manera arbitraria.

Demostración. Para cada $\nu \in \{0, \dots, p\}$ derivamos ν veces la identidad de Marsden (6) respecto a la variable τ:

$$\frac{p!}{(p-\nu)!}\,(-1)^\nu\,(u-\tau)^{p-\nu} = \sum_{j=1}^{n-p-1} (D^\nu \psi_{p,j})(\tau) B_{p,j}(u),$$

y despejamos $(u-\tau)^{p-\nu}$:

$$(u-\tau)^{p-\nu} = (-1)^\nu \frac{(p-\nu)!}{p!} \sum_{j=1}^{n-p-1} (D^\nu \psi_{p,j})(\tau) B_{p,j}(u). \tag{7}$$

Por otro lado, aplicamos la fórmula de Taylor al polinomio f:

$$f(u) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(D^k f)(\tau)}{k!}\,(u-\tau)^k. \tag{8}$$

Hacemos el cambio de variable $\nu = p - k$:

$$f(u) = \sum_{\nu=0}^{p} \frac{(D^{p-\nu} f)(\tau)}{(p-\nu)!}\,(u-\tau)^{p-\nu}. \tag{9}$$

Al sustituir (7) en (9) obtenemos

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n-p-1} \left(\frac{1}{p!} \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu (D^\nu \psi_{p,j})(\tau)(D^{p-\nu} f)(\tau) \right) B_{p,j}(u), \tag{10}$$

y es exactamente lo que dice la proposición. □