Recuperación de los coeficientes de splines básicos

Objetivos. Dada una combinación lineal de splines básicos, recuperar los coeficientes de esta combinación.

1. Identidad de Marsden (repaso).

$$(u-\tau)^p = \sum_j \psi_{p,j}(\tau) B_{p,j}(u),$$

donde

$$\psi_{p,j}(\tau) = (t_{j+1}-\tau)\cdots(t_{j+p-1}-\tau).$$

2. Descomposición del polinomio en una combinación lineal de splines básicos (repaso). Sea f un polinomio de grado $\le p$. Entonces para cada $u \in [t_{1+p}, t_{n-p})$

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n-p-1} \lambda_{p,j}(f) B_{p,j}(u),$$

donde

$$\lambda_{p,j}(f) = \sum_{\nu=0}^{p} \frac{(-D)^{\nu-1}\psi_{p,j}(\tau)}{p!}\, D^{p-\nu} f(\tau).$$

3. Definición (espacio vectorial generado por los splines básicos). Denotemos por $\mathcal{S}_p$ al espacio vectorial de las combinaciones lineales de las funciones $B_{p,1}, \ldots, B_{p,n-p-1}$.

4. Independencia lineal de splines básicos en un trozo. Sea $m \in \{p+1, \ldots, n-p-1\}$ tal que $t_m < t_{m+1}$. Entonces las funciones $B_{p,k}$ con $m-p \le k \le m$, restringidas al intervalo $[t_m, t_{m+1})$, son linealmente independientes.

Demostración. Denotemos por $M_0, \ldots, M_p$ a las funciones monomiales

$$M_j(u) \coloneqq u^j.$$

Sabemos que cada una de las funciones $M_j|_{[t_m,t_{m+1})}$, $0 \le j \le p$, se puede escribir como una combinación lineal de las funciones $B_{p,k}|_{[t_m,t_{m+1})}$ con $1 \le k \le n-p-1$. En realidad, tomando en cuenta los soportes de los splines básicos, cada una de las funciones $M_j|_{[t_m,t_{m+1})}$ es una combinación lineal de las funciones $B_{p,k}|_{[t_m,t_{m+1})}$ con $m-p \le k \le m$. Tenemos $p+1$ funciones que generan a un espacio de dimensión $p+1$. Por lo tanto, forman una base y son linealmente independientes. $\square$

5. Independencia lineal de splines básicos. Supongamos que $t_{m+p} > t_m$ para cada m. Entonces las funciones $B_{p,1}, \ldots, B_{p,n-p-1}$ son linealmente independientes.

Demostración. Supongamos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p-1} \in \mathbb{R}$ y para cada $u \in [t_1, t_n)$

$$\sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k B_{p,k}(u) = 0.$$

Usando la hipótesis que $t_{p+1} > t_1$ elegimos $m \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $t_{m+1} > t_m$. Las funciones $B_{p,1}, \ldots, B_{p,p+1}$ restringidas a $[t_{m+1}, t_m)$ son linealmente independientes, por eso son linealmente independientes sin restringirlas.

De manera similar podemos considerar las funciones $B_{p,2}, \ldots, B_{p,p+2}$, etc. □

6. Definición de funcionales duales de splines básicos. Definimos los funcionales $\lambda_{p,1}, \ldots, \lambda_{p,n-p-1} \colon \mathcal{S}_p \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$\lambda_{p,j}\left(\sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k B_{p,k}\right) = \alpha_j.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{p,j}(B_{p,k}) = \delta_{j,k}.$$

7. Teorema (fórmula para calcular los funcionales duales de splines básicos). Para cada $f \in \mathcal{S}_p$, cada $j \in \{1, \ldots, n-p-1\}$ y cada $\tau \in [t_j, t_{j+p+1})$,

$$\lambda_{p,j}(f) = \sum_{\nu=0}^{p} \frac{(-D)^{\nu-1}\psi_{p,j}(\tau)}{p!} D^{p-\nu} f(\tau).$$

Idea de demostración. Supongamos que

$$f = \sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k B_{p,k}.$$

Elegimos $j \in \{1, \ldots, n-p-1\}$. Encontramos un $m \in \{j, \ldots, j+p\}$ tal que $t_{m+1} > t_m$. La función f restringida al intervalo $[t_m, t_{m+1})$ coincide con un polinomio g restringido a este intervalo. Para cada $u \in [t_m, t_{m+1})$ tenemos

$$g(u) = \sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k B_{p,k}(u),$$

y

$$\lambda_{p,j}(g) = \sum_{\nu=0}^{p} \frac{(-D)^{\nu-1}\psi_{p,j}(\tau)}{p!} D^{p-\nu} g(\tau).$$

Falta notar que $D^{p-\nu} g(\tau) = D^{p-\nu} f(\tau)$ para cada ν. □

8. La derivada de un spline básico.

$$B'_{p,k}(x) = p\left(\frac{B_{p-1,k}(x)}{t_{k+p}-t_k} - \frac{B_{p-1,k+1}(x)}{t_{k+p+1}-t_{k+1}}\right).$$

9. La derivada de una combinación lineal de splines básicos. Sea

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k B_{p,k}(x).$$

Entonces

$$f'(x) = \sum_k p\,\frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{t_{k+p}-t_k} B_{p-1,k}(x).$$