B-splines

Objetivos. Definir el concepto de B-spline y demostrar sus propiedades principales.

1. Definición. Sean $t_1, \ldots, t_n$ algunos números reales tales que

$$t_1 \le \cdots \le t_n.$$

Definimos las funciones $B_{0,1}, \ldots, B_{0,n-1} \colon [t_1, t_n] \to \mathbb{R}$,

$$B_{0,k}(t) \coloneqq \begin{cases} 1, & t \in [t_k, t_{k+1}); \\ 0, & t \notin [t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Para cada $p \in \{1, \ldots, n-2\}$ definimos $B_{p,1}, \ldots, B_{p,n-p-1} \colon [t_1, t_n] \to \mathbb{R}$, mediante la siguiente fórmula recursiva (Cox-de Boor):

$$B_{p,k}(u) = \frac{u - t_k}{t_{k+p} - t_k}\, B_{p-1,k}(u) + \frac{t_{k+p+1} - u}{t_{k+p+1} - t_{k+1}}\, B_{p-1,k+1}(u). \tag{1}$$

2. Notación para los cocientes. Denotemos por $q_{p,k}$ al siguiente cociente:

$$q_{p,k}(u) = \frac{u - t_k}{t_{k+p} - t_k}.$$

Entonces la fórmula (1) se puede escribir como

$$B_{p,k}(u) = q_{p,k}(u) B_{p-1,k}(u) + (1 - q_{p,k+1}(u)) B_{p-1,k+1}(u). \tag{2}$$

3. Observación. Algunos autores empiezan la numeración del orden desde 1: $B_{1,j}, B_{2,j}, \ldots$. Muchos autores escriben los índices en el orden inverso: $B_{j,p}$. En vez B se usa frecuentemente la letra N o φ.

4. B-splines lineales.

$$B_{1,k}(u) = \begin{cases} \dfrac{u - t_k}{t + 1 - t_k}, & t_k \le u < t_{k+1}; \\[2ex] \dfrac{t_{k+2} - u}{t_{k+2} - t_k}, & t_{k+1} \le u < t_{k+2}. \end{cases}$$

5. B-splines cuadráticos. $B_{2,k}(u)$ es:

$$\begin{cases} \dfrac{(u - t_k)^2}{(t_{k+2} - t_k)(t_{k+1} - t_k)}, & t_k \leq u < t_{k+1}; \\[2ex] \dfrac{(u - t_k)(t_{k+2} - u)(t_{k+3} - t_{k+1}) - (t_{k+3} - u)(u - t_{k+1})(t_{k+2} - t_k)}{(t_{k+2} - t_k)(t_{k+2} - t_{k+1})(t_{k+3} - t_{k+1})}, & t_{k+1} \leq u < t_{k+2}; \\[2ex] \dfrac{(t_{k+3} - u)^2}{(t_{k+3} - t_{k+1})(t_{k+3} - t_{k+2})}, & t_{k+2} \leq u < t_{k+3}. \end{cases}$$

6. Propiedad de soporte local. Para cada $p \in \{1, \ldots, n-2\}$ y cada $k \in \{1, \ldots, n-p-1\}$, si $u \notin (t_k, t_{k+p+1})$, entonces $B_{p,k}(u) = 0$.

7. Propiedad positiva. Para cada p y cada j, si $u \in (t_j, t_{j+p+1})$, entonces $B_{p,j}(u) > 0$.

8. El soporte de una función. Dada una función $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, continua o continua a trozos, su *soporte* se puede definir como la cerradura del conjunto de los puntos donde f es distinta de cero:

$$\operatorname{supp}(f) \coloneqq \overline{\{u \in [\alpha, \beta]\colon\ f(u) \neq 0\}}.$$

9. El soporte de un spline básico.

$$\operatorname{supp}(B_{p,k}) = [t_k, t_{k+p+1}].$$

10. Fórmula recursiva para combinaciones lineales de splines básicos. Sean $p \in \{1, \ldots, n-2\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p-1} \in \mathbb{R}$, $u \in [t_{p+1}, t_{n-p})$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k B_{p,k}(u) = \sum_{k=1}^{n-p} (\alpha_k q_{p,k}(u) + \alpha_{k-1}(1 - q_{p,k}(u))) B_{p-1,k}(u), \tag{3}$$

donde α_0 se puede definir de manera arbitraria.

Demostración. Empezamos a transformar el lado izquierdo de (3) usando la fórmula (2):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k B_{p,k}(u) &= \sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k (q_{p,k}(u) B_{p-1,k}(u) + (1 - q_{p,k+1}(u)) B_{p-1,k+1}(u)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k q_{p,k}(u) B_{p-1,k}(u) + \sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k (1 - q_{p,k+1}(u)) B_{p-1,k+1}(u).
\end{aligned}$$

En la segunda suma hacemos el cambio de variable $j = k+1$, luego renombramos la nueva variable por k otra vez:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k (1 - q_{p,k+1}(u)) B_{p-1,k+1}(u) &= \sum_{j=2}^{n-p} \alpha_{j-1} (1 - q_{p,j}(u)) B_{p-1,j}(u) \\
&= \sum_{k=2}^{n-p} \alpha_{k-1} (1 - q_{p,k}(u)) B_{p-1,k}(u).
\end{aligned}$$

Llegamos a la expresión

$$\sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k B_{p,k}(u) = \sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k q_{p,k}(u) B_{p-1,k}(u) + \sum_{k=2}^{n-p} \alpha_{k-1}(1 - q_{p,k}(u)) B_{p-1,k}(u). \tag{4}$$

A la primera suma queremos agregar el sumando con $k = n - p$, y a la segunda suma queremos agregar el sumando con $k = 1$. Vamos a verificar que estos sumandos son cero. Recordamos que $u \in [t_{p+1}, t_{n-p})$. Por eso $u \notin [t_{n-p}, t_n)$, y $B_{p-1,n-p}(u) = 0$. Por otro lado, $u \notin [t_1, t_{p+1})$, por eso $B_{p-1,1}(u) = 0$. Con esto tenemos

$$\alpha_{n-p} q_{p,n-p} B_{p-1,n-p}(u) = 0, \qquad \alpha_0(1 - q_{p,1}(u)) B_{p-1,1}(u) = 0,$$

y

$$\sum_{k=1}^{n-p-1} \alpha_k B_{p,k}(u) = \sum_{k=1}^{n-p} \alpha_k q_{p,k}(u) B_{p-1,k}(u) + \sum_{k=1}^{n-p} \alpha_{k-1}(1 - q_{p,k}(u)) B_{p-1,k}(u).$$

Ahora tenemos dos sumas con los mismos límites. Al juntarlas obtenemos (3). □

11. Partición de la unidad. Para cada p en $\{1, \ldots, n-2\}$ y cada u en $[t_{p+1}, t_{n-p})$,

$$\sum_{k=1}^{n-p-1} B_{p,k}(u) = 1.$$

Demostración. Usamos la inducción matemática sobre p. Para $p = 0$ la propiedad es obvia, el paso de inducción se sigue de la fórmula (3) aplicada con $\alpha_k = 1$. □

12. Polinomios segmentarios. Para cada p, k, m, la función $B_{p,k}$ restringida a (x_m, x_{m+1}) es una función polinomial de grado $\leq p$.

13. Suavidad. Si $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, entonces para cada p y cada k se tiene que $B_{p,k} \in C^{p-1}[t_1, t_n]$.