Análisis de los métodos de Runge–Kutta de segundo orden

Objetivos. Demostrar estimaciones superiores para el error de truncamiento local y para el error global en varios métodos de Runge–Kutta de segundo orden.

1. Repaso: cota global del error a partir de una cota del error de truncamiento local. Sean A un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, $L = \operatorname{diam}(A)$, $f \in C(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $K > 0$ tal que

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le K|u - v| \qquad (t \in A,\ u, v \in \mathbb{R}).$$

Para cada (t_0, x_0) en $A \times \mathbb{R}$ denotemos por x_{t_0,x_0} a la solución del problema de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$. Sea $S \in C(A \times \mathbb{R} \times (0, +\infty), \mathbb{R})$ una función que para cada terna (t_0, x_0, h) da una aproximación $S(t_0, x_0, h)$ del número $x_{t_0,x_0}(t_0 + h)$, y para cada $h > 0$ existe un número ε_h que

$$|S(t_0, x_0, h) - x_{t_0,x_0}(t_0 + h)| \le \varepsilon_h. \tag{1}$$

Sean $t_0 \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ y $n \in \mathbb{N}_1$ tales que $t_0 + nh \in A$. Pongamos $t_j = t_0 + jh$ para cada j en $\{0, \ldots, n\}$, y definimos $v_0, \ldots, v_n$ mediante la regla

$$v_0 \coloneqq x_0, \qquad v_{j+1} \coloneqq S(t_j, v_j, h).$$

Entonces

$$\max_{0 \le j \le n} |v_j - x_{t_0,x_0}(t_j)| \le \frac{\varepsilon_h}{h} \, \frac{e^{LK} - 1}{K}. \tag{2}$$

2. Condición de Lipschitz a partir de las derivadas del lado derecho. Si la derivada parcial $D_2 f$ de la función f está acotada: $|D_2 f(t, v)| \le K_2$, entonces f satisface

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le K_2 |u - v|.$$

Esta afirmación se obtiene directamente del teorema de valor medio.

3. Lema: cotas para las derivadas de la solución y cotas para las derivadas del lado derecho de la ecuación. Supongamos que x es una solución de la ecuación $x'(t) = f(t, x(t))$. Por brevedad escribimos $D_1^p D_2^q f$ en vez de $(D_1^p D_2^q f)(t, x(t))$. Entonces por la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned}
x' &= f, \\
x'' &= D_1 f + f\, D_2 f, \\
x''' &= D_1^2 f + f D_1 D_2 f + (D_1 f + f D_2 f) D_2 f + f(D_1 D_2 f + f D_2^2 f).
\end{aligned}$$

Resumen: si la función f y sus derivadas parciales de orden menor o igual que 2 (es decir, las funciones $D_1^p D_2^q f$ con $p + q \le 2$) están acotadas, entonces las derivadas x', x'', x''' de la solución x también están acotadas. Usamos la notación de Landau. Por ejemplo, si una función se acota por Ch^3, entonces la escribimos como $O(h^3)$.

4. Fórmula de Taylor bidimensional de orden 1. Supongamos que f tiene derivadas continuas hasta el segundo orden en un dominio, y las derivadas parciales hasta el segundo orden están uniformemente acotadas. Entonces existe un $C > 0$ tal que

$$f(t+h, u+w) = f(t,u) + h(D_1 f)(t,u) + w(D_2 f)(t,u) + R(t,u,h,w).$$

5. Proposición: una cota superior del error de truncamiento local en el método de Heun. Por la fórmula de Taylor con el residuo en la forma de Lagrange, la solución exacta se puede escribir en la forma

$$x(t+h) = v + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + \frac{h^3}{6}x'''(\xi),$$

donde ξ es algún punto entre t y $t+h$. Por el Lema, $|x'''(\xi)|$ se acota por una constante, así que el término residuo se puede escribir como $O(h^3)$. Además expresamos x' y x'' en términos de f:

$$x(t+h) = v + hf(t,v) + \frac{1}{2}\,h^2\,(D_1 f)(t,v) + \frac{1}{2}\,h^2\,f(t,v)\,(D_2 f)(t,v) + O(h^3). \tag{3}$$

Por otro lado, recordamos la fórmula del método de Heun:

$$S(t,v,h) = v + \frac{1}{2}h\big(f(t,v) + f(t+h, v+hf(t,v))\big).$$

Aplicamos la fórmula de Taylor bidimensional del primer orden para el último sumando:

$$f(t+h, v+hf(t,v)) = f(t,v) + h(D_1 f)(t,v) + hf(t,v)(D_2 f)(t,v) + O(h^2).$$

Expandimos $S(t,v,h)$ en términos de f:

$$S(t,v,h) = v + hf(t,v) + \frac{1}{2}h^2\,(D_1 f)(t,v) + \frac{1}{2}h^2\,f(t,v)(D_2 f)(t,v) + O(h^3). \tag{4}$$

Restando (3) de (4) concluimos que

$$S(t,v,h) - x(t+h) = O(h^3).$$

Ahora por el teorema sobre el error global, error global se puede acotar como $O(h^2)$.

6. Esquema general de los métodos de Runge–Kutta de segundo orden. En general,

$$S(t,v,h) = v + b_1 hf(t+c_1 h, v) + b_2 hf(t+c_2 h, v + a_{2,1} hf(t+c_1 h, v)).$$

Expandimos el último sumando por la fórmula de Taylor bidimensional del primer orden:

$$\begin{aligned} f(t + c_2 h, v + a_{2,1} h f(t + c_1 h, v)) &= f(t, v) + c_2 h (D_1 f)(t, v) \\ &\quad + a_{2,1} h f(t + c_1 h, v)(D_2 f)(t, v) + O(h^2). \end{aligned}$$

Además tomamos en cuenta que

$$f(t + c_1 h, v) = f(t, v) + c_1 h (D_1 f)(t, v) + O(h^2)$$

y también

$$f(t + c_1 h, v) = f(t, v) + O(h).$$

Luego

$$\begin{aligned} S(t, v, h) = v + (b_1 + b_2) h f(t, v) + (b_1 c_1 + b_2 c_2) h^2 (D_1 f)(t, v) \\ + b_2 a_{2,1} h^2 f(t, v)(D_2 f)(t, v) + O(h^3). \end{aligned} \tag{5}$$

Queremos que (5) coincida con (3) hasta sumandos de la forma $O(h^3)$, para cualquier función buena f. Llegamos a un sistema de condiciones necesarias y suficientes para los coeficientes:

$$b_1 + b_2 = 1, \qquad b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2}, \qquad b_2 a_{2,1} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

7. Tres métodos de Runge–Kutta de orden 2 como casos particulares del esquema general. Pongamos $c_1 = 0$. Entonces (6) se convierte en

$$b_1 = 1 - b_2, \qquad c_2 = a_{2,1} = \frac{1}{2b_2}.$$

El método de Heun corresponde al caso $b_2 = 1/2$:

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = a_{2,1} = 1.$$

El método de Ralston corresponde al caso $b_2 = 3/4$:

$$b_1 = \frac{1}{4}, \qquad c_2 = a_{2,1} = \frac{2}{3}.$$

El método del punto promedio corresponde al caso $b_2 = 1$:

$$b_1 = 0, \qquad c_2 = a_{2,1} = \frac{1}{2}.$$