Análisis de los métodos de Adams–Bashforth directos para resolver EDO's con valores iniciales

Objetivos. Acotar el error de truncamiento local en los métodos de Adams–Bashforth directos, y deducir un sistema para los coeficientes.

1. Problema. Igual que en las clases anteriores, estamos analizando métodos numéricos para resolver la ecuación

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

con algún valor inicial $x(t_0) = v_0$. Aproximamos los valores de x en puntos $t_0 + h$, $t_0 + 2h$, etc.

2. Proposición (sobre el error de truncamiento local en el método de Adams–Bashforth directo con dos puntos previos). El método

$$v_k = v_{k-1} + b_1 h f(t_{k-1}, v_{k-1}) + b_2 h f(t_{k-2}, v_{k-2}) \tag{1}$$

tiene un error de truncamiento local de orden $O(h^3)$, si $f \in C_b^2$ y los coeficientes b_1, b_2 satisfacen el sistema

$$b_1 + b_2 = 1, \qquad 2(b_1 + 2b_2) = 1, \tag{2}$$

esto es, $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{2}$.

Demostración. La condición $f \in C_b^2$ garantiza que x''' es acotada. Aplicamos la fórmula de Taylor alrededor del punto t_k para aproximar $x(t_{k-1})$, $x'(t_{k-1})$ y $x'(t_{k-2})$:

$$\begin{aligned} x(t_{k-1}) &= x(t_k) - h x'(t_k) + \frac{h^2}{2} x''(t_k) + O(h^3); \\ x'(t_{k-1}) &= x'(t_k) - h x''(t_k) + O(h^2); \\ x'(t_{k-2}) &= x'(t_k) - 2h x''(t_k) + O(h^2). \end{aligned} \tag{3}$$

Supongamos que $v_{k-1} = x(t_{k-1})$ y $v_{k-2} = x(t_{k-2})$. Entonces

$$f(t_{k-1}, v_{k-1}) = x'(t_{k-1}), \qquad f(t_{k-2}, v_{k-2}) = x'(t_{k-2}).$$

Sustituimos las fórmulas (3) en (1):

$$\begin{aligned} v_k &= x(t_k) - h x'(t_k) + \frac{h^2}{2} x''(t_k) + O(h^3) \\ &\quad + b_1 h \big(x'(t_k) - h x''(t_k)\big) + b_2 h \big(x'(t_k) - 2h x''(t_k)\big) \\ &= x(t_k) + \big(-1 + b_1 + b_2\big) x'(t_k) h + \left(\frac{1}{2} - b_1 - 2b_2\right) x''(t_k) h^2 + O(h^3). \end{aligned}$$

Pedimos que los coeficientes de h y h^2 sean cero (independientemente de los valores de x' y x'') y obtenemos el sistema (2). □

3. Proposición (sobre el error de truncamiento local en el método de Adams–Bashforth directo con tres puntos previos). El método

$$v_k = v_{k-1} + b_1 h f(t_{k-1}, v_{k-1}) + b_2 h f(t_{k-2}, v_{k-2}) + b_3 h f(t_{k-3}, v_{k-3}) \tag{4}$$

tiene un error de truncamiento local de orden $O(h^4)$, si $f \in C_b^3$ y los coeficientes b_1, b_2, b_3 satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 1; \\ 2(b_1 + 2b_2 + 3b_3) &= 1; \\ 3(b_1 + 4b_2 + 9b_3) &= 1; \end{aligned} \tag{5}$$

esto es,

$$b_1 = \frac{23}{12}, \qquad b_2 = -\frac{4}{3}, \qquad b_3 = \frac{5}{12}.$$

Demostración. Aplicamos la fórmula de Taylor alrededor del punto t_k para aproximar $x(t_{k-1})$, $x'(t_{k-1})$, $x'(t_{k-2})$ y $x''(t_{k-3})$:

$$\begin{aligned} x(t_{k-1}) &= x(t_k) - hx'(t_k) + \frac{h^2}{2}x''(t_k) - \frac{h^3}{6}x'''(t_k) + O(h^4); \\ x'(t_{k-1}) &= x'(t_k) - hx''(t_k) + \frac{h^2}{2}x'''(t_k) + O(h^3); \\ x'(t_{k-2}) &= x'(t_k) - 2hx''(t_k) + \frac{4h^2}{2}x'''(t_k) + O(h^3); \\ x'(t_{k-3}) &= x'(t_k) - 3hx''(t_k) + \frac{9h^2}{2}x'''(t_k) + O(h^3). \end{aligned} \tag{6}$$

Sustituimos las fórmulas (6) en (4):

$$\begin{aligned} v_k = x(t_k) &+ hx'(t_k)\,(-1 + b_1 + b_2 + b_3) \\ &- \frac{h^2}{2}x''(t_k)\,(-1 + 2(b_1 + 2b_2 + 3b_3)) \\ &+ \frac{h^3}{3}x'''(t_k)\,(-1 + 3(b_1 + 4b_2 + 9b_3)) + O(h^4). \end{aligned}$$

Pedimos que en los sumandos con h, h^2 y h^3 los coeficientes sean 0 (independientemente de los valores de x', x'' y x''') y obtenemos el sistema (5). □

4. Ejercicio. Para un s general, consideremos el siguiente esquema:

$$v_k = v_{k-1} + \sum_{r=1}^{s} b_r f(t_{k-r}, v_{k-r}). \tag{7}$$

Supongamos que $f \in C_b^s$. Escriba un sistema de ecuaciones para los coeficientes $b_1, \ldots, b_s$ tal que el error de truncamiento local sea de orden $O(h^{s+1})$. Sugerencia: observando (2) y (5) adivine la forma correcta del sistema de coeficientes para s general. Escriba una demostración para $s = 4$.