Análisis del método de diferencias finitas implícito para resolver la ecuación de calor en un intervalo

1. Idea del método implicito.

$$\frac{u(x_j, t_k) - u(x_j, t_{k-1})}{\tau} + O(\tau) = \frac{u(x_{j-1}, t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_{j+1}, t_k)}{h^2} + O(h^2).$$

Multiplicamos ambos lados por τ y denotamos $\frac{\tau}{h^2}$ por r. Pasamos los términos con t_k al lado izquierdo, y el término con t_{k-1} al lado derecho:

$$-ru(x_{j-1}, t_k) + (1 + 2r)u(x_j, t_k) - ru(x_{j+1}, t_k) = u(x_j, t_{k-1}) + O(\tau^2 + \tau h^2). \qquad (1)$$

Buscamos una solución aproximada que satisfaga las siguientes ecuaciones:

$$-rU_{j-1}^{(k)} + (1 + 2r)U_j^{(k)} - rU_{j+1}^{(k)} = U_j^{(k-1)}. \qquad (2)$$

Denotemos por $A_{n,r}$ a la matriz cuadrada de orden $n - 1$ tridiagonal de Toeplitz con entradas $-r$, $1 + 2r$, $-r$. Por ejemplo,

$$A_{7,r} = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1+2r & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix}.$$

Entonces las ecuaciones (2) con las condiciones de frontera se pueden escribir en la siguiente forma matricial:

$$A_{n,r}U^{(k)} = U^{(k-1)}. \qquad (3)$$

En cada paso $U^{(k)}$ se obtiene de $U^{(k-1)}$ al resolver un sistema de ecuaciones lineales con la matriz $A_{n,r}$. Formalmente,

$$U^{(k)} = A_{n,r}^{-1}U^{(k-1)}.$$

2. Error local de truncamiento y la convergencia. Denotemos τ/h^2 por r. Sea u la solución exacta de la ecuación de calor. Entonces u satisface (1). Por otro lado, la solución del problema discretizado satisface (2). Denotamos $u(x_j, t_k) - U_{j,k}$ por $Z_j^{(k)}$ y restamos (2) de (1):

$$-rZ_{j-1}^{(k)} + (1+2r)Z_j^{(k)} - rZ_{j+1}^{(k)} = Z_j^{(k-1)} + O(\tau^2 + \tau h^2). \tag{4}$$

Pasemos los términos con $-r$ al lado derecho:

$$(1+2r)Z_j^{(k)} = rZ_{j-1}^{(k)} + rZ_{j+1}^{(k)} + Z_j^{(k-1)} + O(\tau^2 + \tau h^2).$$

Acotemos la norma-máximo:

$$(1+2r)\|Z^{(k)}\|_\infty \le 2r\|Z^{(k)}\|_\infty + \|Z^{(k-1)}\|_\infty + C(\tau^2 + \tau h^2).$$

Despejamos $\|Z^{(k)}\|_\infty$:

$$\|Z^{(k)}\|_\infty \le \|Z^{(k-1)}\|_\infty + C(\tau^2 + \tau h^2).$$

Como $Z^{(0)}$ es el vector cero, obtenemos

$$\|Z^{(k)}\|_\infty \le kC(\tau^2 + \tau h^2).$$

El máximo valor de k es m, y $m\tau = t_{\max}$. Luego para cada k

$$\|Z^{(k)}\|_\infty \le Ct_{\max}(\tau + h^2).$$

Resumen: el método implícito converge para cualquier r, y el orden de la convergencia es $O(\tau + h^2)$.