Análisis del método de diferencias finitas explícito para resolver la ecuación de calor en un intervalo

Este texto todavía no está completo.

1. Error local de truncamiento y la convergencia. Denotemos τ/h^2 por r. Sea u la solución exacta de la ecuación de calor. Entonces

$$u(x_j, t_{k+1}) = ru(x_{j-1}, t_k) + (1 - 2r)u(x_j, t_k) + ru(x_{j+1}, t_k)) + O(\tau^2 + \tau h^2). \qquad (1)$$

En el esquema explícito de diferencias finitas

$$U_{j,k+1} = rU_{j-1,k} + (1 - 2r)U_{j,k} + rU_{j+1,k}. \qquad (2)$$

Denotamos $u(x_j, t_k) - U_{j,k}$ por $Z_j^{(k)}$ y restamos (2) de (1):

$$Z_j^{(k+1)} = rZ_{j-1}^{(k)} + (1 - 2r)Z_j^{(k)} + rZ_{j+1}^{(k)} + O(\tau^2 + \tau h^2). \qquad (3)$$

Supongamos que $r \le 1/2$. Entonces

$$\|Z^{(k+1)}\|_\infty \le \|Z^{(k)}| + C(\tau^2 + \tau h^2).$$

De aquí sale fácilmente que

$$\|Z^{(m)}\|_\infty \le mC(\tau^2 + \tau h^2) = (m\tau)C(\tau + h^2) = t_{\max}C(\tau + h^2).$$

Resumen: si $r \le 1/2$, entonces el método converge, y el orden de convergencia es $O(\tau+h^2)$.