Análisis del método de diferencias finitas para resolver un caso simple del problema de frontera sobre un intervalo

1. Problema de frontera. Consideremos el problema de frontera

$$x''(t) = f(t), \qquad x(0) = x(1) = 0, \tag{1}$$

donde f es una función dada de clase $C([0,1])$, x es la función incógnita. Ya sabemos que el problema tiene una única solución. Denotemos por V al espacio de las funciones x de clase $C^2([0,1])$ tales que $x(0) = x(1) = 0$, y por D^2 al operador $V \to C([0,1])$ que actúa mediante la regla

$$(D^2x)(t) = x''(t).$$

2. Aproximación discreta y la estabilidad del método. Ya hemos visto que el operador D^2 en el espacio V en cierto sentido se aproxima por la matriz

$$A_n = -n^2 T_{n-1},$$

donde T_{n-1} es la matriz tridiagonal de Toeplitz con entradas $-1, 2, -1$, de tamaño $n-1$. Por ejemplo, para $n = 6$ tenemos la matriz de Toeplitz

$$T_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A veces se dice que A_n es la matriz del método. Ya sabemos que la matriz T_n es invertible para cada n, y tenemos cotas superiores para la norma de su inversa, respecto a la norma vectorial euclidiana y respecto a la norma-máximo:

$$\|T_n^{-1}\|_{\mathrm{matr},2} \le \frac{(n+1)^2}{4}, \qquad \|T_n^{-1}\|_{\mathrm{matr},\infty} \le \frac{(n+1)^2}{8}.$$

Luego

$$\|A_n\|_{\mathrm{matr},2} \le \frac{1}{4}, \qquad \|A_n\|_{\mathrm{matr},2} \le \frac{1}{8}.$$

Cuando las normas de las matrices inversas al operador discretizado son acotadas por una constante que no depende de n, se dice el método es *estable*.

3. El error de truncamiento local. Sea x una solución del problema (1). Denotemos por X_n al vector de longitud $n-1$ obtenido como la discretización de la función x, y denotemos por F_n al vector de los valores de f en los puntos de la malla:

$$X_{n,j} = x\left(\frac{j}{n}\right), \qquad j \in \{1,\ldots,n-1\}, \qquad F_{n,j} = f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Como vimos antes, el problema (1) se convierte en la ecuación aproximada

$$A_n X_n \approx F_n.$$

Denotemos por R_n al vector de los residuos correspondientes:

$$R_n \coloneqq A_n X_n - F_n.$$

Las componentes del vector R_n son *errores de truncamiento locales*. Si $\|R_n\|_\infty$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito, se dice que el método es *consistente*.

4. Cota superior del error de truncamiento local. Recordemos que

$$R_{n,j} = n^2(X_{n,j-1} - 2X_{n,j} - X_{n,j+1}) - F_n = x''(j/n) + \frac{x^{(4)}(\xi_{n,j})}{12n^2} - f(j/n) = \frac{x^{(4)}(\xi_{n,j})}{12n^2},$$

donde $\xi_{n,j}$ son algunos puntos intermedios. Supongamos que la función f'' es continua y acotada. Entonces $x^{(4)}$ es continua y acotada por una constante C, y $R_{n,j}$ se puede escribir como $O(1/n^2)$. Las normas del vector E_n se acotan de la siguiente manera:

$$\|R_n\|_\infty \le \frac{C}{n^2}, \|R_n\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |E_{n,k}|^2\right)^{1/2} \le \left(\frac{C^2}{n^3}\right)^{1/2} = \frac{C}{n^{3/2}}.$$

5. Convergencia del método. Sea x una solución exacta del problema original (1). Denotemos por X_n a la discretización de x, y denotemos por Y_n a la solución del problema discretizado $A_n Y_n = F_n$. En otras palabras,

$$Y_n \coloneqq A_n^{-1} F_n.$$

Denotemos por Δ_n a la diferencia entre los vectores Y_n y X_n:

$$\Delta_n \coloneqq Y_n - X_n.$$

Se dice que el método *converge*, si $\|\Delta_n\|_\infty$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Recordemos que

$$A_n X_n = F_n + R_n, \qquad A_n Y_n = F_n.$$

Luego $A_n \Delta_n = R_n$ y $\Delta_n = A_n^{-1} R_n$. Acotamos la norma-máximo:

$$\|\Delta_n\|_\infty \le \|A_n\|_{\mathrm{matr},\infty} \|R_n\|_\infty \le \frac{C}{8n^2}.$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

6. Teorema (sobre el orden de convergencia del método de diferencias finitas para resolver un caso simple de problema de frontera sobre un intervalo). Sea $f \in C^2([0,1])$. Entonces el error del método de diferencias finitas aplicado al problema (1), con la matriz $A_n = -n^{-2} T_{n-1}$ se puede acotar como $O(1/n^2)$.

Notamos que la norma euclidiana del error se acota como $O(1/n^{3/2})$.