Análisis de convergencia del esquema de Crank y Nicolson para resolver la ecuación de calor en un intervalo

1. Problema inicial. Supongamos que u es la solución de la ecuación

$$(D_2 u)(x,t) = (D_1^2 u)(x,t)$$

con las condiciones de frontera $u(0,t) = u(1,t) = 0$ con la condición inicial $u(x,0) = f(x)$.

2. Teorema (sobre el error de truncamiento local en el esquema de Crank y Nicolson). Sea u la solución exacta del Problema 1. Supongamos que sus derivadas parciales $D_2^2 u$, $D_2^2 D_1^2 u$ y $D_1^4 u$ son acotadas. Entonces

$$\begin{aligned} &-\rho u(x-h,t+\tau) + (2+2\rho)u(x,t+\tau) - \rho u(x+h,t+\tau) \\ &= \rho u(x-h,t) + (2-2\rho)u(x,t) + \rho u(x+h,t) + O(\tau h^2) + O(\tau^3). \end{aligned} \tag{1}$$

Demostración. Expandimos la función u alrededor del punto $(x, t+\tau/2)$:

$$\begin{aligned} u(x,t+\tau) &= u\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau}{2}(D_2 u)\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau^2}{8}(D_2^2 u)\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau^3}{48}(D_2^3 u)(x,\xi), \\ u(x,t) &= u\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right) - \frac{\tau}{2}(D_2 u)\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau^2}{8}(D_2^2 u)\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right) - \frac{\tau^3}{48}(D_2^3 u)(x,\eta). \end{aligned}$$

Cuando restamos estas dos fórmulas, los términos con τ^2 se cancelan, y obtenemos

$$u(x,t+\tau) - u(x,t) = \tau(D_2 u)(x, t+\tau/2) + O(\tau^3). \tag{2}$$

Expandimos la función $D_1^2 u$ alrededor del punto $(x, t+\tau/2)$:

$$(D_1^2 u)(x,t+\tau) = (D_1^2 u)(x,t+\tau/2) + \frac{\tau}{2}(D_2 D_1^2 u)(x,t+\tau/2) + O(\tau^2),$$

$$(D_1^2 u)(x,t) = (D_1^2 u)(x,t+\tau/2) - \frac{\tau}{2}(D_2 D_1^2 u)(x,t+\tau/2) + O(\tau^2).$$

Cuando sumamos estas dos fórmulas, los términos con τ se cancelan, y obtenemos

$$(D_1^2 u)(x,t+\tau/2) = \frac{(D_1^2 u)(x,t) + (D_1^2 u)(x,t+\tau)}{2} + O(\tau^2). \tag{3}$$

Luego aproximamos $(D_1^2 u)(x,t)$ y $(D_1^2 u)(x,t+\tau)$ por las fórmulas

$$\begin{aligned} (D_1^2 u)(x,t) &= \frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{h^2} + O(h^2), \\ (D_1^2 u)(x,t+\tau) &= \frac{u(x-h,t+\tau) - 2u(x,t+\tau) + u(x+h,t+\tau)}{h^2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Sustituimos estas expresiones en (3) y obtenemos

$$\begin{aligned}(D_1^2 u)(x, t+\tau/2) = {}& \frac{u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)}{2h^2} \\ &+ \frac{u(x-h,t+\tau) - 2u(x,t+\tau) + u(x+h,t+\tau)}{2h^2} + O(h^2).\end{aligned} \tag{4}$$

Combinamos (2) con (4), tomando en cuenta la ecuación

$$(D_2 u)(x, t+\tau/2) = (D_1^2 u)(x, t+\tau/2)$$

y denotando τ/h^2 por ρ:

$$\begin{aligned}u(x,t+\tau) - u(x,t) = {}& \frac{\rho}{2}\left(u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)\right) \\ &+ \frac{\rho}{2}\left(u(x-h,t+\tau) - 2u(x,t+\tau) + u(x+h,t+\tau)\right) \\ &+ O(\tau h^2) + O(\tau^3).\end{aligned}$$

Multiplicamos ambos lados por 2. Pasamos los términos con $t+\tau$ al lado izquierdo y los términos con t al lado derecho, y obtenemos (1). $\square$

3. Esquema de Crank y Nicolson. Dado un $t_{\max} > 0$ y algunos números $n, m \in \mathbb{N}$, pongamos

$$h = \frac{1}{n}, \qquad \tau = \frac{t_{\max}}{m}.$$

Resolvemos las ecuaciones

$$-\rho U_{j-1}^{(k+1)} + (2+2\rho) U_j^{(k+1)} - \rho U_{j+1}^{(k+1)} = \rho U_{j-1}^{(k)} + (2-2\rho) U_j^{(k)} + \rho U_{j+1}^{(k)} \tag{5}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$, empezando con la condición inicial

$$U_j^{(0)} = F_j \coloneqq f\left(\frac{j}{n}\right)$$

y tomando en cuenta las condiciones de frontera

$$U_0^{(k)} = 0, \qquad U_n^{(k)} = 0.$$

4. Esquema de Crank y Nicolson en la forma matricial. Denotemos por T_n a la matriz tridiagonal de Toeplitz de orden n con entradas -1, 2, -1, por A_n a la matriz tridiagonal de Toeplitz de orden $n-1$ con entradas $-\rho$, $2+2\rho$, $-\rho$, y por B_n a la matriz tridiagonal de Toeplitz de orden $n-1$ con entradas ρ, $2-2\rho$, ρ. Además, denotamos por

$u^{(k)}$ al vector $\left[u_j^{(k)}\right]_{j=1}^{n-1}$. Escribimos los vectores y las matrices en la forma explícita para $n = 7$:

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2+2\rho & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 2+2\rho & -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 2+2\rho & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 2+2\rho & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 2+2\rho & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 2+2\rho \end{bmatrix}, \quad u^{(k+1)} = \begin{bmatrix} u_1^{(k+1)} \\ u_2^{(k+1)} \\ u_3^{(k+1)} \\ u_4^{(k+1)} \\ u_5^{(k+1)} \\ u_6^{(k+1)} \end{bmatrix},$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} 2-2\rho & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho & 2-2\rho & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 2-2\rho & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 2-2\rho & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 2-2\rho & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 2-2\rho \end{bmatrix}, \quad u^{(k)} = \begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ u_3^{(k)} \\ u_4^{(k)} \\ u_5^{(k)} \\ u_6^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Entonces el esquema de Crank y Nicolson se puede escribir en la forma matricial de la siguiente manera:

$$A_n u^{(k+1)} = B_n u^{(k)}. \tag{6}$$

Análisis espectral del esquema de Crank–Nicolson

5. Denotemos por T_n a la matriz tridiagonal de Toeplitz con entradas $-1, 2, -1$. Antes demostramos que la matriz T_n se diagonaliza por la matriz S_n (la transformada discreta de seno), y los valores propios de T_n son $4 \operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. En otras palabras,

$$S_n T_n S_n = \operatorname{diag}\left[4 \operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}\right]_{j=1}^{n}.$$

Las matrices A_n y B_n se pueden escribir como

$$A_n = 2I_{n-1} + \rho T_{n-1}, \qquad B_n = 2I_{n-1} - \rho T_{n-1}.$$

Por lo tanto, las matrices A_n y B_n se diagonalizan por la matriz S_{n-1}:

$$A_n = S_{n-1} \operatorname{diag}\left[2 + 4\rho \operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2n}\right]_{j=1}^{n-1} S_{n-1}, \quad B_n = S_{n-1} \operatorname{diag}\left[2 - 4\rho \operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2n}\right]_{j=1}^{n-1} S_{n-1}.$$

Consideramos la matriz $A_n^{-1} B_n$:

$$A_n^{-1} B_n = S_{n-1} D_{n-1} S_{n-1},$$

donde

$$D_{n-1} = \operatorname{diag}\left[\frac{1-2\rho\,\mathrm{sen}^2\,\frac{j\pi}{2n}}{1+2\rho\,\mathrm{sen}^2\,\frac{j\pi}{2n}}\right]_{j=1}^{n-1} S_{n-1}.$$

Los valores propios $\mu_{n,j}$ de la matriz $A_n^{-1}B_n$ cumplen con la propiedad

$$|\mu_{n,j}| \le \frac{\left|1-2\rho\,\mathrm{sen}^2\,\frac{j\pi}{2n}\right|}{1+2\rho\,\mathrm{sen}^2\,\frac{j\pi}{2n}} \le \frac{1+2\rho\,\mathrm{sen}^2\,\frac{j\pi}{2n}}{1+2\rho\,\mathrm{sen}^2\,\frac{j\pi}{2n}} = 1.$$

Luego la norma matricial de la matriz D_{n-1}, asociada a la norma euclideana, es acotada por 1:

$$\|D_{n-1}\|_{\mathrm{matr},2} \le 1.$$

La matriz S_{n-1} es ortogonal y preserva la norma euclideana, luego

$$\|A_n^{-1}B_n\|_{\mathrm{matr},2} = \|D_{n-1}\|_{\mathrm{matr},2} \le 1.$$

De manera similar,

$$\|A_n^{-1}\|_{\mathrm{matr},2} \le \frac{1}{2}.$$

6. Convergencia del esquema de Crank y Nicolson en la norma euclideana. Denotemos por $Z_j^{(k)}$ la diferencia entre la solución exacta $u(x_j, t_j)$ y la solución $U_j^{(k)}$ obtenida con el esquema de Crank y Nicolson. Entonces

$$(A_n Z^{(k+1)})_j = (B_n Z^{(k)})_j + (E^{(k+1)})_j,$$

donde $|(E^{(k+1)})_j| \le C\tau(h^2+\tau^2)$. En la forma vectorial,

$$A_n Z^{(k+1)} = B_n Z^{(k)} + E^{(k+1)},$$

donde $\|E^{(k+1)}\|_2 \le C\tau\sqrt{n}(h^2+\tau^2)$. Luego

$$\begin{aligned}\|Z^{(k+1)}\|_2 &\le \|A_n^{-1}B_n\|_{\mathrm{matr},2}\|Z^{(k)}\|_2 + \|A_n^{-1}\|_{\mathrm{matr},2}C\tau\sqrt{n}(h^2+\tau^2)\\ &\le \|Z^{(k)}\|_2 + C\tau\sqrt{n}(h^2+\tau^2).\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\|Z^{(k)}\|_2 \le Ct_{\max}\sqrt{n}(h^2+\tau^2).$$