Teorema de Picard sobre la existencia y unicidad de solución de EDO con condiciones iniciales

Objetivos. Demostrar el teorema sobre la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy.

Hay varias versiones del teorema de Picard. Por simplicidad, en estos apuntes consideramos el caso cuando la funión f está definida en una franja de la forma $A \times \mathbb{R}$.

1. Problema. Sean A un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, $f\colon A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, $t_0 \in A$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se busca una función derivable $x\colon A \to \mathbb{R}$ tal que

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (t \in A), \qquad x(t_0) = x_0.$$

2. Espacio de funciones continuas y acotadas. Denotamos por $C_b(A)$ al espacio vectorial de las funciones continuas y acotadas $A \to \mathbb{R}$. Se sabe que el espacio $C_b(A)$, dotado de la norma-supremo

$$\|x\|_\infty \coloneqq \sup_{t \in A} |x(t)|,$$

es un espacio de Banach.

3. Proposición (reducción del problema de Cauchy al problema del punto fijo de un operador integral). En el espacio de funciones $C_b(A)$ consideramos el operador

$$(Sx)(u) = x_0 + \int_{t_0}^{u} f(t, x(t))\, dt. \tag{1}$$

Entonces $Sx = x$ si y sólo si x es una solución del Problema 1.

Demostración. Supongamos que $Sx = x$. Entonces

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(t, x(t))\, dt = x_0$$

y por el (primer) teorema fundamental de cálculo

$$x'(u) = f(u, x(u)).$$

Al revés, supongamos que x es una solución del Problema 1. Entonces por el (segundo) teorema fundamental de cálculo

$$x(u) = x(t_0) + \int_{t_0}^{u} x'(t)\, dt = x_0 + \int_{t_0}^{u} f(t, x(t))\, dt. \qquad \square$$

4. Teorema de Picard (en una franja). Sea A un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, sea $f \in C_b(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que existe un $K > 0$ con

$$|f(t, \nu_1) - f(t, \nu_2)| \leq K|\nu_1 - \nu_2| \qquad (t \in A,\ \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}),$$

y sean $t_0 \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces el Problema 1 tiene una única solución.

Primera demostración del teorema de Picard en una franja. Consideramos el operador S en el espacio $C_b(A)$ con la norma–supremo:

$$\|x\|_{\sup} \coloneqq \sup_{t \in A} |x(t)|.$$

Sea L la longitud del intervalo A. Vamos a mostrar que para un p bastante grande el operador S^p es contractivo. Afirmamos que para cada p en $\mathbb{N}_0$ se cumple la siguiente afirmación $\mathcal{A}(p)$:

$$\forall x, y \in C_b(A) \quad \forall u \in A \qquad |(S^p x - S^p y)(u)| \leq \frac{(K|u - t_0|)^p}{p!} \|x - y\|_{\sup}.$$

La base (la afirmación $\mathcal{A}(0)$) es trivial. Suponiendo $\mathcal{A}(p)$ demostremos $\mathcal{A}(p+1)$. Sea $x \in C_b(A)$. Entonces para cada u en A

$$\begin{aligned} |(S^{p+1}x - S^{p+1}y)(u)| &= \left| \int_{t_0}^{u} \left(f(t, (S^p x)(t)) - f(t, (S^p y)(t)) \right) \, dt \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{u} K|(S^p x)(t) - (S^p y)(t)| \, dt \leq \int_{t_0}^{u} K^{p+1} \frac{|t - t_0|^p}{p!} |x - y\|_{\sup}. \end{aligned}$$

Partiendo los casos $u \geq t_0$ y $u < t_0$, en ambos casos obtenemos

$$|(S^{p+1}x - S^{p+1}y)(u)| \leq \frac{K^{p+1}|u - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|x - y\|_{\sup}.$$

Por el principio de inducción, $\mathcal{A}(p)$ se cumple para cada p en $\mathbb{N}_0$. Pasando al sup sobre u obtenemos

$$\|S^p x - S^p y\|_{\sup} \leq \frac{(KL)^p}{p!} \|x - y\|_{\sup}.$$

La sucesión $\frac{(KL)^p}{p!}$ tiende a cero cuando p tiende a infinito, por eso se puede elegir un p tal que $\frac{(KL)^p}{p!} < 1$. □

5. Otra norma en $C_b(A)$. Vamos a estudiar otra demostración del teorema de Picard. Para ello necesitamos otra norma en el espacio $C_b(A)$. La llamamos la "norma especial para el teorema de Picard" y la denotamos por $\|\cdot\|_P$:

$$\|x\|_P \coloneqq \sup_{t\in A}\left(e^{-K|t-t_0|}|x(t)|\right).$$

Es fácil verificar que $\|\cdot\|_P$ tiene propiedades de norma. Comparemos esta norma con la norma-supremo. Para cada punto t en A tenemos

$$e^{-K|t-t_0|} \le 1 \le e^{KL}e^{-K|t-t_0|},$$

$$e^{-K|t-t_0|}|x(t)| \le |x(t)| \le e^{KL}e^{-K|t-t_0|}|x(t)|$$

y

$$\|x\|_P \le \|x\|_{\sup} \le e^{KL}\|x\|_P.$$

Estas desigualdades significan que la norma $\|\cdot\|_P$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{\sup}$. Por eso es fácil ver que una sucesión de funciones $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge respecto a $\|\cdot\|_P$ si y sólo si converge respecto a $\|\cdot\|_{\sup}$. Una sucesión de funciones $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy respecto a $\|\cdot\|_P$ si y sólo si es de Cauchy respecto a $\|\cdot\|_{\sup}$. Por eso el espacio $C_b(A)$ con la norma $\|\cdot\|_P$ es un espacio de Banach.

Segunda demostración del teorema de Picard en una franja. Demostremos que S es contractivo respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_P$. Sean $x, y \in C_b(A)$. Entonces

$$\begin{aligned}|(Sx)(t) - (Sy)(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t}(f(u,x(u)) - f(u,y(u)))\,du\right| \le \int_{t_0}^{t}|f(u,x(u)) - f(u,y(u))|\,du \\ &\le \int_{t_0}^{t}K|x(u)-y(u)|\,du = \int_{t_0}^{t}Ke^{K|u-t_0|}e^{-K|u-t_0|}|(x-y)(u)|\,du.\end{aligned}$$

Notamos que $e^{-K|u-t_0|}|x(u)-y(u)| \le \|x-y\|_P$ por la definición de la norma $\|\cdot\|_P$. Por eso

$$|(Sx)(t) - (Sy)(t)| \le \|x-y\|_P\int_{t_0}^{t}Ke^{K|u-t_0|}\,du.$$

Considerando dos casos: $t \ge t_0$ y $t < t_0$, en ambos casos obtenemos

$$\int_{t_0}^{t}Ke^{K|u-t_0|}\,du = e^{K|t-t_0|} - 1.$$

Entonces

$$e^{-K|t-t_0|}\,|(Sx)(t) - (Sy)(t)| \le \|x-y\|_P\left(1 - e^{-K|t-t_0|}\right) \le \|x-y\|_P\left(1-e^{-KL}\right),$$

y

$$\|Sx - Sy\|_P \leq \left(1 - e^{-KL}\right) \|x - y\|_P.$$

El número $1 - e^{-KL}$ es estrictamente menor que 1, así que el operador S es una función contractiva en el espacio $(C_b(A), \|\cdot\|_P)$. El espacio $(C_b(A), \|\cdot\|_P)$ es completo, por eso S tiene un único punto fijo. $\square$