

Teorema de Picard sobre la existencia y unicidad de solución de EDO con condiciones iniciales

Objetivos. Demostrar el teorema sobre la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy.

Teorema global en una franja

1. Problema. Sean A un intervalo finito en \mathbb{R} , $f: A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada, $t_0 \in A$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se busca una función derivable $x: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (t \in A), \quad x(t_0) = x_0.$$

2. Espacio de funciones continuas y acotadas. Denotamos por $C_b(A)$ al espacio vectorial de las funciones continuas y acotadas $A \rightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que el espacio $C_b(A)$, dotado de la norma-supremo

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in A} |x(t)|,$$

es un espacio de Banach.

3. Proposición (reducción del problema de Cauchy al problema de punto fijo de un operador integral). En el espacio de funciones $C_b(A)$ consideramos el operador

$$(Sx)(u) = x_0 + \int_{t_0}^u f(t, x(t)) dt. \quad (1)$$

Entonces $Sx = x$ si y sólo si x es una solución del Problema 1.

Demostración. Supongamos que $Sx = x$. Entonces

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(t, x(t)) dt = x_0$$

y por el (primer) teorema fundamental de cálculo

$$x'(u) = f(u, x(u)).$$

Al revés, supongamos que x es una solución del Problema 1. Entonces por el (segundo) teorema fundamental de cálculo

$$x(u) = x(t_0) + \int_{t_0}^u x'(t) dt = x_0 + \int_{t_0}^u f(t, x(t)) dt. \quad \square$$

4. Teorema global de Picard. Sea A un intervalo finito en \mathbb{R} , sea $f \in C_b(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que existe un $K > 0$ con

$$|f(t, v_1) - f(t, v_2)| \leq K|v_1 - v_2| \quad (t \in A, v_1, v_2 \in \mathbb{R}),$$

y sean $t_0 \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces el Problema 1 tiene una única solución.

Primera demostración del teorema global de Picard. Consideramos el operador S en el espacio $C_b(A)$ con la norma-supremo:

$$\|x\|_{\text{sup}} := \sup_{t \in A} |x(t)|.$$

Sea L la longitud del intervalo A . Vamos a mostrar que para un p bastante grande el operador S^p es contractivo. Afirmamos que para cada p en \mathbb{N}_0 se cumple la siguiente afirmación $\mathcal{A}(p)$:

$$\forall x, y \in C_b(A) \quad \forall u \in A \quad |(S^p x - S^p y)(u)| \leq \frac{(K|u - t_0|)^p}{p!} \|x - y\|_{\text{sup}}.$$

La base (la afirmación $\mathcal{A}(0)$) es trivial. Suponiendo $\mathcal{A}(p)$ demostremos $\mathcal{A}(p + 1)$. Sea $x \in C_b(A)$. Entonces para cada u en A

$$\begin{aligned} |(S^{p+1}x - S^{p+1}y)(u)| &= \left| \int_{t_0}^u (f(t, (S^p x)(t)) - f(t, (S^p y)(t))) dt \right| \\ &\leq \int_{t_0}^u K|(S^p x)(t) - (S^p y)(t)| dt \leq \int_{t_0}^u K^{p+1} \frac{|t - t_0|^p}{p!} \|x - y\|_{\text{sup}} dt. \end{aligned}$$

Partiendo los casos $u \geq t_0$ y $u < t_0$, en ambos casos obtenemos

$$|(S^{p+1}x - S^{p+1}y)(u)| \leq \frac{K^{p+1}|u - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|x - y\|_{\text{sup}}.$$

Por el principio de inducción, $\mathcal{A}(p)$ se cumple para cada p en \mathbb{N}_0 . Pasando al sup sobre u obtenemos

$$\|S^p x - S^p y\|_{\text{sup}} \leq \frac{(KL)^p}{p!} \|x - y\|_{\text{sup}}.$$

La sucesión $\frac{(KL)^p}{p!}$ tiende a cero cuando p tiende a infinito, por eso se puede elegir un p tal que $\frac{(KL)^p}{p!} < 1$. □

5. Otra norma en $C_b(\mathbf{A})$. Vamos a estudiar otra demostración del teorema de Picard. Para ello necesitamos otra norma en el espacio $C_b(\mathbf{A})$. La llamamos la “norma especial para el teorema de Picard” y la denotamos por $\|\cdot\|_p$:

$$\|\mathbf{x}\|_p := \sup_{t \in \mathbf{A}} (e^{-K|t-t_0|} |\mathbf{x}(t)|).$$

Es fácil verificar que $\|\cdot\|_p$ tiene propiedades de norma. Comparemos esta norma con la norma-supremo. Para cada punto t en \mathbf{A} tenemos

$$e^{-K|t-t_0|} \leq 1 \leq e^{KL} e^{-K|t-t_0|},$$

por eso

$$e^{-K|t-t_0|} |\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}(t)| \leq e^{KL} e^{-K|t-t_0|} |\mathbf{x}(t)|$$

y

$$\|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_{\text{sup}} \leq e^{KL} \|\mathbf{x}\|_p.$$

Estas desigualdades significan que la norma $\|\cdot\|_p$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{\text{sup}}$. Por eso es fácil ver que una sucesión de funciones $(\mathbf{x}_n)_{n=0}^{\infty}$ converge respecto a $\|\cdot\|_p$ si y sólo si converge respecto a $\|\cdot\|_{\text{sup}}$. Una sucesión de funciones $(\mathbf{x}_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy respecto a $\|\cdot\|_p$ si y sólo si es de Cauchy respecto a $\|\cdot\|_{\text{sup}}$. Por eso el espacio $C_b(\mathbf{A})$ con la norma $\|\cdot\|_p$ es un espacio de Banach.

Segunda demostración del teorema global de Picard. Demostremos que el operador S definido mediante la fórmula (1) es contractivo respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_p$. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_b(\mathbf{A})$. Entonces

$$\begin{aligned} |(S\mathbf{x})(t) - (S\mathbf{y})(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(u, \mathbf{x}(u)) - f(u, \mathbf{y}(u))) \, du \right| \leq \int_{t_0}^t |f(u, \mathbf{x}(u)) - f(u, \mathbf{y}(u))| \, du \\ &\leq \int_{t_0}^t K |\mathbf{x}(u) - \mathbf{y}(u)| \, du = \int_{t_0}^t K e^{K|u-t_0|} e^{-K|u-t_0|} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|(u) \, du. \end{aligned}$$

Notamos que $e^{-K|u-t_0|} |\mathbf{x}(u) - \mathbf{y}(u)| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p$ por la definición de la norma $\|\cdot\|_p$. Por eso

$$|(S\mathbf{x})(t) - (S\mathbf{y})(t)| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p \int_{t_0}^t K e^{K|u-t_0|} \, du.$$

Considerando dos casos: $t \geq t_0$ y $t < t_0$, en ambos casos obtenemos

$$\int_{t_0}^t K e^{K|u-t_0|} \, du = e^{K|t-t_0|} - 1.$$

Entonces

$$e^{-K|t-t_0|} |(Sx)(t) - (Sy)(t)| \leq \|x - y\|_p (1 - e^{-K|t-t_0|}) \leq \|x - y\|_p (1 - e^{-KL}),$$

y

$$\|Sx - Sy\|_p \leq (1 - e^{-KL}) \|x - y\|_p.$$

El número $1 - e^{-KL}$ es estrictamente menor que 1, así que el operador S es una función contractiva en el espacio $(C_b(\mathcal{A}), \|\cdot\|_p)$. El espacio $(C_b(\mathcal{A}), \|\cdot\|_p)$ es completo, por eso S tiene un único punto fijo. \square