Desigualdad de Grönwall–Bellman

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Grönwall–Bellman llamada también la desigualdad de Grönwall en forma integral.

1. Desigualdad de Grönwall–Bellman (para funciones continuas positivas). Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $t_0 \in A$, $c \geq 0$, $u, b \in C(A, [0, +\infty))$. Supongamos que para cada t en $A \cap [t_0, +\infty)$

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\,ds. \tag{1}$$

Entonces para cada t en $A \cap [t_0, +\infty)$

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right). \tag{2}$$

Demostración. Primero consideremos el caso $c > 0$. Denotemos el lado derecho de (1) por $R(t)$:

$$R(t) \coloneqq c + \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\,ds.$$

Notamos que en la definición de la función $R(t)$ participa la función u. Queremos que la función u estuviera solamente en el lado izquierdo de la desigualdad, por eso dividimos ambos lados de (1) entre $R(t)$. La condición $c > 0$ garantiza que $R(t) > 0$ para cada t en $A \cap [t_0, +\infty)$, así que la división es correcta y preserva la desigualdad:

$$\frac{u(t)}{R(t)} \leq 1.$$

Multiplicamos ambos lados por $b(t)$:

$$\frac{b(t)u(t)}{R(t)} \leq b(t).$$

Por el teorema fundamental de cálculo, $R'(t) = b(t)u(t)$, así que

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \leq b(t).$$

Cambiamos la variable t por s:

$$\frac{R'(s)}{R(s)} \leq b(s).$$

Integramos ambos lados de t_0 a t. Como $R'(s)/R(s)$ es la derivada de la función $\ln(R(s))$, obtenemos

$$\ln(R(t)) - \ln(R(t_0)) \le \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds.$$

Aquí $R(t_0) = c$, por eso

$$\ln(R(t)) \le \ln(c) + \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds.$$

Aplicando la función creciente exp a ambos lados, obtenemos

$$R(t) \le c \exp\left(\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right).$$

Otra recordamos la condición inicial ($u(t) \le R(t)$) y por transitividad obtenemos (2).

Ahora consideremos el caso $c = 0$. Estamos suponiendo que

$$u(t) \le \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\,ds,$$

y queremos demostrar que $u(t) \le 0$, esto es, $u(t) = 0$. Para cada $c > 0$ tenemos

$$u(t) \le c + \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)\,ds,$$

y podemos aplicar el resultado que ya demostramos para $c > 0$:

$$u(t) \le c \exp\left(\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right).$$

Esta desigualdad se cumple para cada $c > 0$. Pasamos al límite cuando c tiende a cero y obtenemos $u(t) \le 0$. $\square$

2. Observación. Para $t < t_0$ y $b \ge 0$ la integral $\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds$ es nula o negativa, y el intervalo $[t_0, t]$ es vacío. Dado, un subconjunto X de $\mathbb{R}$, denotamos por $\operatorname{conv}(X)$ con envoltura convexa. En particular,

$$\operatorname{conv}\{t_0, t\} = [\min\{t_0, t\}, \max\{t_0, t\}] = \begin{cases} [t_0, t], & t_0 \le t; \\ [t, t_0], & t < t_0. \end{cases}$$

3. Corolario (extensión izquierda de la desigualdad de Grönwall–Bellman para funciones continuas positivas). Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $u, b \in C(A, [0, +\infty))$, $t_0 \in A$, $c \geq 0$. Supongamos que para cada t en A

$$u(t) \leq c + \int\limits_{\operatorname{conv}\{t_0,t\}} b(s)u(s)\,ds. \tag{3}$$

Entonces para cada t en A

$$u(t) \leq c \exp\left(\int\limits_{\operatorname{conv}\{t_0,t\}} b(s)\,ds \right). \tag{4}$$

Demostración. Para $t \geq t_0$ todo se reduce al teorema anterior. Falta entender la situación en el intervalo $A \cap (-\infty, t_0]$. Escribimos (3) con $t_0 - \tau$ en vez de t:

$$u(t_0 - \tau) \leq c + \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0} b(s)u(s)\,ds.$$

Hacemos el cambio de variable $\sigma = t_0 - s$:

$$u(t_0 - \tau) \leq c + \int\limits_0^{\tau} b(t_0 - \sigma)u(t_0 - \sigma)\,d\sigma.$$

Definimos dos funciones nuevas $\widetilde{u}, \widetilde{b}$:

$$\widetilde{u}(\tau) \coloneqq u(t_0 - \tau), \qquad \widetilde{b}(\tau) \coloneqq b(t_0 - \tau).$$

Entonces

$$\widetilde{u}(\tau) \leq c + \int\limits_0^{\tau} \widetilde{b}(\sigma)\widetilde{u}(\sigma)\,d\sigma.$$

Aplicamos el teorema anterior a las funciones nuevas $\widetilde{u}, \widetilde{b}$, luego hacemos otra vez el cambio de variable y obtenemos el resultado requerido. $\square$