Convergencia del método de Euler

Objetivos. Demostrar el método de Euler converge y estimar el orden de la convergencia, suponiendo que el dominio de la función f es una franja y la función f es Lipschitz continua respecto a cada uno de sus dos argumentos.

1. Lema (para pasar de una cota recursiva a una cota directa). Sean $c \in \mathbb{R}$, $b > 1$, y sea $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $a_0 = 0$ y

$$a_{k+1} \le c + b a_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Entonces

$$a_k \le c \frac{b^k - 1}{b - 1}. \tag{1}$$

Demostración. Demostremos (1) por inducción matemática sobre k. Para $k = 0$ la desigualdad es válida (ambos lados son 0); verifiquemos el paso de la inducción. Supongamos (1) y demostremos la desigualdad similar con $k+1$ en lugar de k. Aplicamos la condición inidical, luego la hipótesis de la inducción:

$$a_{k+1} \le c + b a_k \le c + bc \frac{b^k - 1}{b - 1} = c \left(1 + \frac{b^{k+1} - b}{b - 1}\right) = c \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1}. \qquad \square$$

2. Observación. El lema sigue siendo válido para cualquier $b \ge 0$. En el caso $b = 1$ hay que sustituir la desigualdad (1) por $a_k \le kc$. La demostración también se puede hacer por inducción matemática sobre k.

3. Teorema (convergencia del método de Euler). Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $L > 0$, $A = [t_0, t_0 + L]$, $f \in C(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Supongamos que f es absolutamente acotada por un número M:

$$|f(t, v)| \le M \qquad (t \in A,\ v \in \mathbb{R}),$$

y que existen $K_1, K_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |f(t_1, v) - f(t_2, v)| &\le K_1 |t_1 - t_2| \qquad (t_1, t_2 \in A,\ v \in \mathbb{R}); \\ |f(t, v_1) - f(t, v_2)| &\le K_2 |v_1 - v_2| \qquad (t \in A,\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Sean $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$. Pongamos $h = L/n$, $t_j = t_0 + jh$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$. Definimos $v_0, \ldots, v_n$ mediante las fórmulas

$$v_0 := x_0, \qquad v_{j+1} = v_j + h f(t_j, v_j).$$

Entonces

$$\max_{0 \le j \le n} |v_j - x(t_j)| \le \left(\frac{K_1}{K_2} + M\right) (e^{L K_2} - 1) h. \tag{2}$$

donde x es la solución del problema de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$.

Demostración. Primero estimemos el error en un paso. Sabemos que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x(s))\, ds.$$

Sea j en $\{0, \ldots, n-1\}$. Entonces para cada t en $[t_j, t_{j+1}]$

$$x(t) = x(t_j) + \int_{t_j}^{t} f(s, x(s))\, ds, \qquad \text{luego} \qquad |x(t) - x(t_j)| \leq \int_{t_j}^{t} M\, ds \leq hM.$$

Por otro lado,

$$\nu_{j+1} = x_0 + \int_{t_j}^{t_j+h} f(t_j, \nu_j)\, ds.$$

Acotamos la diferencia $\nu_{j+1} - x(t_{j+1})$:

$$\begin{aligned}
|\nu_{j+1} - x(t_{j+1})| &\leq |\nu_j - x(t_j)| + \int_{t_j}^{t_j+h} |f(t_j, \nu_j) - f(s, x(s))|\, ds \\
&= |\nu_j - x(t_j)| + \int_{t_j}^{t_j+h} |f(t_j, \nu_j) - f(s, \nu_j) + f(s, \nu_j) - f(s, x(s))|\, ds \\
&\leq |\nu_j - x(t_j)| + \int_{t_j}^{t_j+h} (K_1|s - t_j| + K_2|x(s) - \nu_j|)\, ds \\
&\leq |\nu_j - x(t_j)| + \int_{t_j}^{t_j+h} (K_1|s - t_j| + K_2|x(s) - x(t_j)| + K_2|x(t_j) - \nu_j|)\, ds \\
&= (K_1 + MK_2)h^2 + (1 + K_2 h)|x(t_j) - \nu_j|.
\end{aligned}$$

Hemos acotado el error en un paso de manera recursiva:

$$|\nu_{j+1} - x(t_{j+1})| \leq (K_1 + MK_2)h^2 + (1 + K_2 h)|\nu_j - x(t_j)|. \tag{3}$$

Aplicamos el lema a la sucesión $a_j = |\nu_j - x(t_j)|$, $c = (K_1 + MK_2)h^2$ y $b = 1 + K_2 h$. Obtenemos:

$$|\nu_j - x(t_j)| \leq (K_1 + MK_2)h^2 \, \frac{(1 + K_2 h)^j - 1}{K_2 h} = \left(\frac{K_1}{K_2} + M\right) h \, \left((1 + K_2 h)^j - 1\right).$$

Falta notar que la expresión $(1+K_2 h)^j$ alcanza su máximo cuando $j = n$ y se puede acotar de la siguiente manera:

$$(1 + K_2 h)^j \leq (1 + K_2 h)^n \leq (e^{K_2 h})n = e^{K_2 hn} = e^{LK_2}. \qquad \square$$