Álgebras de operadores de Toeplitz en los espacios de Hardy y de Bergman

Miguel Ángel Rodríguez Rodríguez

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, Ciudad de México

Seminario
Matrices y operadores
ESFM, 2017

Contenido

El espacio de Hardy

$\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{D} \colon |\lambda| = 1\}$

$d\lambda$: Medida normalizada e invariante en $\mathbb{T}$ ($\lambda(\mathbb{T}) = 1$).

n-ésimo coeficiente de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T}, d\lambda)$:

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(\lambda)\overline{\lambda}^n d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

$$H^2 = \left\{f \in L^2(\mathbb{T}, d\lambda) \colon \ \widehat{f}(n) = 0, \ n < 0\right\}.$$

El espacio de Hardy

Las familia de funciones $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\varepsilon_n\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \quad \varepsilon_n(\lambda) = \lambda^n,$$

es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{T}, d\lambda)$.

El espacio de Hardy H^2 es un espacio de Hilbert, y una base ortonormal para este espacio es $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$.

Proyección de Szegő (proyección ortogonal):

$$P\colon L^2(\mathbb{T}, d\lambda) \to H^2.$$

Operadores de Toeplitz

Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}, d\lambda)$. Se define el *operador de Toeplitz con símbolo* φ

$$T_\varphi : H^2 \to H^2$$

como

$$T_\varphi(f) = P(\varphi f), \quad \forall f \in H^2.$$

$C(\mathbb{T})$: Álgebra C^* de funciones continuas en $\mathbb{T}$.

Objetivo

Estudiar el álgebra C^* generada por operadores de Toeplitz T_φ cuando $\varphi \in C(\mathbb{T})$.

No conmutatividad de $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$: ejemplo

T_{ε_1}: desplazamiento a la derecha,

$$T_{\varepsilon_1}(a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots) = a_0\varepsilon_1 + a_1\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + \dots.$$

$T_{\varepsilon_{-1}}$: desplazamiento a la izquierda.

$$T_{\varepsilon_{-1}}(a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots) = a_1\varepsilon_0 + a_2\varepsilon_1 + \dots.$$

Calculamos ambas composiciones:

$$T_{\varepsilon_{-1}}T_{\varepsilon_1}(a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots) = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots$$

$$T_{\varepsilon_1}T_{\varepsilon_{-1}}(a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots) = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots$$

No conmutatividad: ejemplo

$$T_{\varepsilon_{-1}} T_{\varepsilon_1} \neq T_{\varepsilon_1} T_{\varepsilon_{-1}}$$

Pero

$$T_{\varepsilon_{-1}} T_{\varepsilon_1} - T_{\varepsilon_1} T_{\varepsilon_{-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n \right) = a_0$$

$T_{\varepsilon_{-1}} T_{\varepsilon_1} - T_{\varepsilon_1} T_{\varepsilon_{-1}}$ es un operador de rango 1 (finito).

$T_{\varepsilon_{-1}} T_{\varepsilon_1} - T_{\varepsilon_1} T_{\varepsilon_{-1}}$ es compacto.

Compacidad

Sea $\mathcal{K}(H^2)$ el ideal de operadores compactos en $\mathcal{B}(H^2)$.

Proposición

Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$*, entonces* $T_\varphi \in \mathcal{K}(H^2)$ *si y solo si* $\varphi = 0$.

Proposición

Si $\varphi \in C(\mathbb{T})$ *y* $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$*, entonces*

$$T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi},\ T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi} \in \mathcal{K}(H^2).$$

Compacidad

$\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$: Álgebra C^* generada por operadores de Toeplitz con símbolos en $C(\mathbb{T})$.

Proposición

El álgebra $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$ es irreducible y $\mathcal{K}(H^2) \subset \mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$

El álgebra $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$

Teorema

La aplicación

$$\Psi\colon C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2), \quad \varphi \mapsto T_\varphi + K(H^2)$$

es un $*$-isomorfismo.

Corolario

Estas dos álgebras C^* son isomorfas:

$$\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2) \cong C(\mathbb{T}).$$

El espacio de Bergman

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$.

dA: medida de Lebesgue de $\mathbb{D}$, $A(\mathbb{D}) = 1$.

El espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es el subespacio de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ de funciones analíticas.

$\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert.

Base ortonormal en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$

La sucesión de funciones $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$:

$$\beta_n\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad \varepsilon_n(z) = \sqrt{n+1}\, z^n,$$

es una base ortonormal para $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Proyección de Bergman (proyección ortogonal):

$$P\colon L^2(\mathbb{D}, dA) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

Operadores de Toeplitz

Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$. Se define el *operador de Toeplitz con símbolo* φ

$$T_\varphi \colon \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$$

como

$$T_\varphi(f) = P(\varphi f), \quad \forall f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

$C(\overline{\mathbb{D}})$: Álgebra C^* de funciones continuas en $\overline{\mathbb{D}}$.

Objetivo

Estudiar el álgebra C^* generada por operadores de Toeplitz T_φ cuando $\varphi \in C(\overline{\mathbb{D}})$.

No conmutatividad: ejemplo

$\mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))$ no es conmutativa:

Sea $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$, $a(z) = z$.

$$T_a(\beta_n) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\beta_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

$$T_{\overline{a}}(\beta_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\beta_{n-1}, \quad n \geq 1, \qquad T_{\overline{a}}(\beta_0) = 0.$$

No conmutatividad: ejemplo

$$T_a T_{\overline{a}}(\beta_n) = \frac{n}{n+1}\beta_n, \qquad T_{\overline{a}} T_a(\beta_n) = \frac{n+1}{n+2}\beta_n.$$

No obstante

$$(T_{\overline{a}} T_a - T_{\overline{a}} T_a)(\beta_n) = \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right)\beta_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\beta_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

$T_{\overline{a}} T_a - T_{\overline{a}} T_a$ es compacto.

Compacidad

$\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$: Ideal de operadores compactos en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Proposición

Si $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$, entonces $T_a \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$ si y solo si a se anula en $\partial\mathbb{D}$.

Hay más operadores de Toeplitz compactos además del operador 0.

Proposición

Sean $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y $b \in L^\infty(\mathbb{D})$. Entonces

$$T_aT_b - T_{ab}, T_bT_a - T_{ba} \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})).$$

Compacidad

$\mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))$: Álgebra C^* generada por operadores de Toeplitz con símbolos en $C(\overline{\mathbb{D}})$.

Proposición

El álgebra $\mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))$ es irreducible y $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})) \subset \mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))$.

El álgebra $\mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))$

Proposición

La función $\Psi\colon C(\overline{\mathbb{D}}) \to \mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))$,

$$\Psi(a) = T_a + \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})), \quad a \in C(\overline{\mathbb{D}})$$

es un $*$*-epimorfismo e induce el* $*$*-isomorfismo*

$$a + C_0(\mathbb{T}) \mapsto T_a + \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})), \quad a \in C(\overline{\mathbb{D}}).$$

Corolario

Estas dos álgebras C^* *son isomorfas:*

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))/\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})) \cong C(\mathbb{T}).$$

$\mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))$ contra $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))/\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})) \cong C(\mathbb{T}) \cong \mathcal{T}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2)$$

"Despreciando" operadores compactos obtenemos la misma álgebra en ambos espacios.

¿Se puede dar una relación directa entre los operadores de Toeplitz de ambos espacios?

$\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, H^2 y $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Isomorfía entre el espacio de Hardy y $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$R_H\colon H^2 \to \ell^2(\mathbb{Z}_+), \quad R_H(\varepsilon_n) = e_n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon_n \mapsto (a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Isomorfía entre el espacio de Bergman y $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$R_B\colon \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+), \quad R_B(\beta_n) = e_n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\beta_n \mapsto (a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Operadores unitarios

Operadores unitarios entre H^2 y $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$:

$$W = R_H^* R_B \colon \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to H^2$$

$$W^* = R_B^* R_H \colon H^2 \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$$

Ideales de operadores compactos:

$$W \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})) W^* = \mathcal{K}(H^2)$$

$$W^* \mathcal{K}(H^2) W = \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$$

$\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, H^2 y $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$

$$a \in C(\overline{\mathbb{D}}) \text{ y } a_0 = a|_{\partial\mathbb{D}},\ T_1 = R_H T_{a_0} R_H^*,\ T_2 = R_B T_a R_B^*.$$

$$\begin{tikzcd}
H^2 \arrow[r, "R_H"'] \arrow[d, "T_{a_0}^H"'] \arrow[rr, bend left, "W^*"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \arrow[d, shift right, "T_1"'] \arrow[d, shift left, "T_2"] & \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \arrow[l, "R_B"] \arrow[d, "T_a^B"] \\
H^2 \arrow[r, "R_H"] & \ell^2(\mathbb{Z}_+) & \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \arrow[l, "R_B"'] \arrow[ll, bend left, "W"]
\end{tikzcd}$$

Relación entre T_1 y T_2

$a \in C(\mathbb{T})$.

Coeficientes de Fourier: $a_k = \widehat{a}(k)$.

El operador $T_1 = R_H T_a^H R_h^*$ actúa en $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Representación matricial:

$$(a_{n-k})_{n,k\in\mathbb{Z}_+}$$

Relación entre T_1 y T_2

Representación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Relación entre T_1 y T_2

Extensión de a_0 al disco $\mathbb{D}$:

$$a(re^{i\theta}) = a_0(e^{i\theta}).$$

El operador $T_2 = R_B T_a^B R_B^*$ actúa en $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Representación matricial:

$$\left(\frac{2\sqrt{(n+1)(k+1)}}{(n+1)+(k+1)} a_{n-k} \right)_{n,k\in\mathbb{Z}_+}$$

Relación entre T_1 y T_2

Representación matricial:

$$\begin{bmatrix} c_{0,0}\; a_0 & c_{0,1}\; a_{-1} & c_{0,2}\; a_{-2} & c_{0,3}\; a_{-3} & \cdots \\ c_{1,0}\; a_1 & c_{0,1}\; a_0 & c_{0,2}\; a_{-1} & c_{0,3}\; a_{-2} & \cdots \\ c_{2,0}\; a_2 & c_{0,1}\; a_1 & c_{0,2}\; a_0 & c_{0,3}\; a_{-1} & \cdots \\ c_{3,0}\; a_3 & c_{0,1}\; a_2 & c_{0,2}\; a_1 & c_{0,3}\; a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$c_{n.k} = \frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{k+1}}{(n+1)+(k+1)} \to 1, \quad n, k \to \infty$$

Relación entre T_1 y T_2

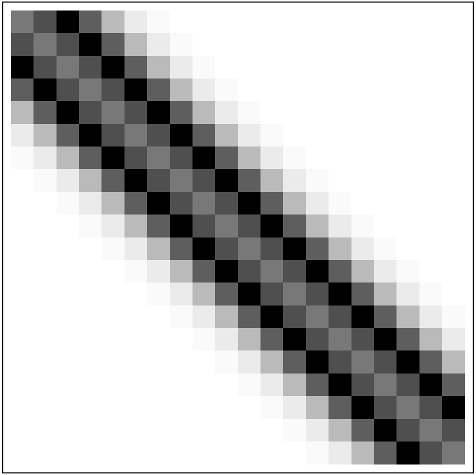
La representación matricial de $T_2 - T_1$ es

$$\left(\left(\frac{2\sqrt{(n+1)(k+1)}}{(n+1)+(k+1)} - 1 \right) a_{n-k} \right)_{n,k\in\mathbb{Z}_+}$$

$a \in C(\mathbb{T}) \Rightarrow T_2 - T_1$ es compacto.

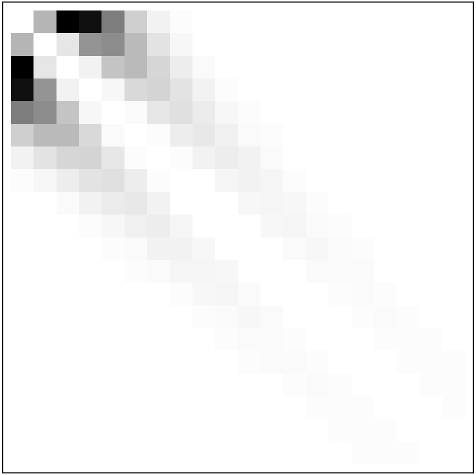
Ejemplo de matriz del operador T_a^H

$a(z) = e^{3i \operatorname{Im} z}$



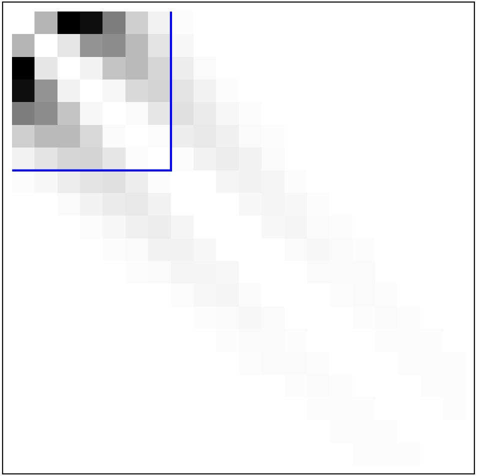
Diferencia de las matrices de los operadores T_a^H y T_a^B

$$a(z) = e^{3i\,\mathrm{Im}\,z}$$



Diferencia de las matrices de los operadores T_a^H y T_a^B

$$a(z) = e^{3i\,\mathrm{Im}\,z}$$



Relación entre T_a^B y $T_{a_0}^H$

Teorema

Sea $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y a_0 su restricción a $\mathbb{T}$, o bien, sea $a_0 \in C(\mathbb{T})$ y a su extensión a $\partial\mathbb{D}$. Entonces

$$WT_a^B W^* = T_{a_0}^H + K_H,$$

$$W^* T_{a_0}^H W = T_a^B + K_B,$$

donde los operadores K_H y K_B son compactos

Isomorfía entre las álgebras de Calkin

$$\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2)$$

$$\updownarrow$$

$$W^*\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))W/\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$$

$$\|$$

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))/\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$$

Referencias

MURPHY, G. J. (2015):
C*-Algebras and Operator Theory. Academic Press, Inc.

VASILEVSKI, NIKOLAI L. (2012):
On the algebras generated by Toeplitz operators with piecewise continuous symbols.
Indagationes Mathematicae 23 (2012) 556–570.

Referencias

- VASILEVSKI, NIKOLAI L. (2008):
  Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space, volume 185 of *Operator Theory: Advances and Applications*.
  Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2008.
- ZHU, KEHE (2007):
  Operator theory in function spaces. Second edition. Series: Mathematical surveys and monographs, Volume 138, 348 pages.
  American Mathematical Society, 2007.

¡Gracias!