Ejemplos de construcción de matrices de Laplace de algunos grafos en el lenguaje de MATLAB

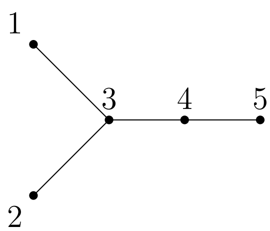
Estos ejercicios forman una parte de trabajo conjunto de Mario Guzmán Silverio, Egor Maximenko, Rogelio Rocha Hernández y Eliseo Sarmiento Rosales.

Objetivos. Practicar técnicas del lenguaje de MATLAB construyendo matrices laplacianas de varios grafos simples (se consideran solamente grafos no dirigidos sin bucles).

Requisitos. Comandos de MATLAB para construir matrices especiales, programación de funciones en el lenguaje de MATLAB.

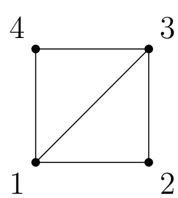
1. Análogos libres de MATLAB. En los ejemplos escritos abajo se usa el dialecto de GNU Octave. Otras buenas opciones son Scilab y FreeMat.

2. Ejemplo de la matriz laplaciana de un grafo.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

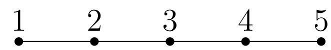
3. Un ejemplo más.



$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Descripción de la tarea. En cada uno de los ejercicios escritos a continuación se describe una clase simple de grafos y se propone escribir una función en el lenguaje de MATLAB que construya la matriz laplaciana para grafos de este tipo. Los programas deben estar escritos **sin ciclos** y aprovechar los comandos y técnicos especiales del lenguaje de MATLAB. Como una opción, se puede usar la sintaxis especial de MATLAB para crear matrices dispersas.

5. Camino. El parámetro de la función es el tamaño del grafo. El dibujo corresponde al parámetro $n = 5$.



Una realización posible es la siguiente:

```
function A = LaplaceMatrixOfPathGraph(n),
  if n > 1,
    A = 2 * eye(n) - diag(ones(n - 1, 1), 1) - diag(ones(n - 1, 1), -1);
    A(1, 1) = 1;
    A(n, n) = 1;
  else,
    A = 0;
  endif
endfunction
```

Otra solución que produce una matriz dispersa:

```
function A = LaplaceMatrixOfPathGraph(n),
  if n > 1,
    A = 2 * speye(n);
    A(1, 1) = 1; A(n, n) = 1;
    A = spdiags(-ones(n, 2), [-1, 1], A);
  else,
    A = 0;
  endif
endfunction
```

Después de programar la función, hay que probarla ejecutando en el intérprete el siguiente comando:

```
LaplaceMatrixOfPathGraph(5)
```

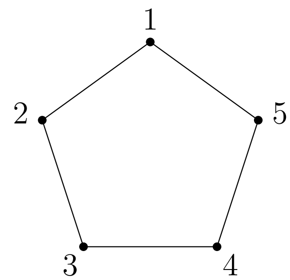
La respuesta debe ser la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

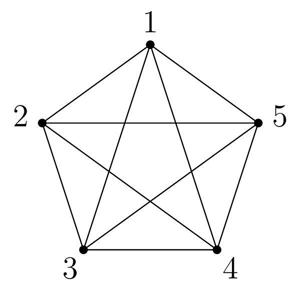
Si la matriz se regresa en el formato comprimido (Compressed Column Sparse), entonces uno puede convertirla al formato completo usando la función `full`:

```
full(LaplaceMatrixOfPathGraph(5))
```

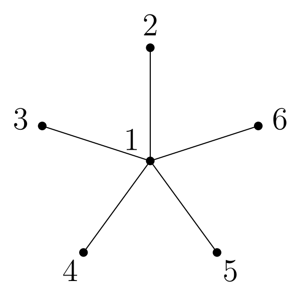
6. Grafo circular. El parámetro de la función es el tamaño del grafo. El dibujo corresponde al parámetro $n = 5$.



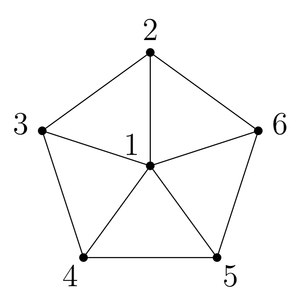
7. Grafo completo. El parámetro de la función es el tamaño del grafo. El dibujo corresponde al parámetro $n = 5$.



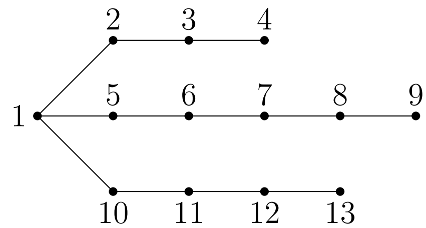
8. Estrella. El parámetro de la función es el tamaño del grafo. El dibujo corresponde al parámetro $n = 6$.



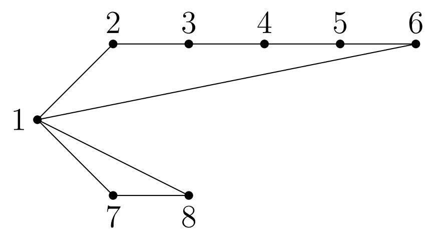
9. Rueda. El parámetro de la función es el tamaño del grafo. El dibujo corresponde al parámetro $n = 6$.



10. Árbol polar. El grafo consiste de m ramos de longitudes $L_1, \ldots, L_m$ que empiezan desde un vértice. El parámetro de la función es la m-tupla $(L_1, \ldots, L_m)$ dada como un arreglo `L`. Por ejemplo, si el parámetro de la función es el arreglo `[4; 6; 5]`, entonces el grafo correspondiente es



11. Rosa. El grafo consiste de m ciclos (*pétalos*) de longitudes $L_1, \ldots, L_m$ unidos en un vértice. El parámetro de la función es la m-tupla $(L_1, \ldots, L_m)$ dada como un arreglo `L`. Por ejemplo, si el parámetro de la función es el arreglo `[6; 3]`, entonces el grafo correspondiente es



12. Tema para meditar. Las matrices laplacianas de grafos surgen de manera natural al estudiar varios problemas sobre grafos, por ejemplo, los problemas de difusión o los problemas de propagación de ondas. El análisis espectral de matrices laplacianas de grafos se conoce también como el *análisis armónico sobre grafos*.