

Notación breve para sumas

Ejercicios

Notación. El símbolo $\sum_{k=1}^n a_k$ se usa para denotar la suma $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^4 a_k = \underset{\text{con } k=1}{a_k} + \underset{\text{con } k=2}{a_k} + \underset{\text{con } k=3}{a_k} + \underset{\text{con } k=4}{a_k} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Definición formal inductiva (solamente para conocerla; no vamos a trabajar con esta definición). Formalmente, el símbolo $\sum_{k=1}^n a_k$ se puede definir por inducción:

$$\sum_{k=1}^0 a_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}.$$

Escriba las siguientes sumas en forma explícita:

Ejemplo. $\sum_{k=1}^7 b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7$.

1. $\sum_{k=1}^5 x_k =$

2. $\sum_{k=1}^4 2^k = \underset{\text{con } k=1}{2^k} + \underset{\text{con } k=2}{2^k} + \underset{\text{con } k=3}{2^k} + \underset{\text{con } k=4}{2^k} = 2 + 4 + \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} + \underbrace{\hspace{1cm}}_{?} =$

3. $\sum_{k=1}^5 k^2 =$

4. $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\quad} + \frac{1}{\quad} =$

La variable de sumatoria es una variable “muda”

5. Escriba de manera explícita todos los sumandos y calcule las sumas:

$$\sum_{j=1}^3 j^2 = \underset{\text{con } j=1}{j^2} + \underset{\text{con } j=2}{j^2} + \underset{\text{con } j=3}{j^2} =$$

$$\sum_{k=1}^3 k^2 = \underset{\text{con } k=1}{k^2} + \underset{\text{con } k=2}{k^2} + \underset{\text{con } k=3}{k^2} =$$

¿Aparece alguna de las variables j o k en la respuesta?

La variable de sumatoria es una variable “muda”.

En la notación $\sum_{i=1}^n a_i$ la variable i se llama la *variable de la sumatoria* o el *índice de la*

sumatoria. Esta variable es *muda*, esto es, el valor de la suma $\sum_{i=1}^n a_i$ no depende de i .

La variable i se puede cambiar de nombre:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Cambie la variable de la sumatoria:

6. $\sum_{i=1}^7 c_i = \sum_{k=}$

7. Consideremos la suma

$$\sum_{k=1}^m a_k.$$

¿De qué depende el valor de la suma?

Elija las respuestas correctas (puede ser varias):

Del número m (que en este ejemplo es igual al número de los sumandos).

De la variable k .

De los valores de a_1, \dots, a_m .

Sumandos más complicados

El sumando general no necesariamente es tan simple; puede ser una expresión más complicada:

$$8. \quad \sum_{k=1}^4 k^2 x_k = 1^2 x_1 + 2^2 x_2 + 3^2 x_3 + 4^2 x_4 = x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4.$$

$$9. \quad \sum_{k=1}^4 a_k b_k =$$

$$10. \quad \sum_{k=1}^4 (k + 10) =$$

11. Para pasar de la notación \sum a una expresión extensa (con todos los sumandos) no es necesario comprender bien el sumando general, solamente hay que sustituir la variable de la suma por los valores que toma:

$$\sum_{k=1}^3 c^{(k)} \delta_{\langle k \rangle} = \underbrace{c^{(1)} \delta_{\langle 1 \rangle}}_{\text{con } k=1} + \underbrace{c^{(2)} \delta_{\langle 2 \rangle}}_{\text{con } k=2} + \underbrace{c^{(3)} \delta_{\langle 3 \rangle}}_{\text{con } k=3} = c^{(1)} \delta_{\langle 1 \rangle} + \underbrace{\hspace{2cm}}_{?} + \underbrace{\hspace{2cm}}_{?}.$$

El caso cuando los sumandos no dependen de la variable de la suma

12. **Ejemplo.** Puede ser que los sumandos son constantes, esto es, no dependen del índice de la suma:

$$\sum_{j=1}^5 4 = \underbrace{4}_{\text{con } j=1} + \underbrace{4}_{\text{con } j=2} + \underbrace{4}_{\text{con } j=3} + \underbrace{4}_{\text{con } j=4} + \underbrace{4}_{\text{con } j=5} = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 20.$$

13. Escriba la siguiente suma de manera explícita y simplifique el resultado (aquí el sumando es constante, es decir, no depende de k):

$$\sum_{k=1}^3 7 = \underbrace{7}_{\text{con } k=1} + \underbrace{7}_{\text{con } k=2} + \underbrace{7}_{\text{con } k=3} =$$

Sumas sobre un intervalo de índices

14. Ejemplos.

$$\sum_{k=2}^5 a_k = \underset{\text{con } k=2}{a_k} + \underset{\text{con } k=3}{a_k} + \underset{\text{con } k=4}{a_k} + \underset{\text{con } k=5}{a_k} = a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

$$\sum_{q=4}^7 c_q = c_4 + c_5 + c_6 + c_7, \quad \sum_{j=3}^5 b_j = \underbrace{\hspace{4em}}_?,$$

$$\sum_{i=3}^4 c_i d_i = c_3 d_3 + c_4 d_4, \quad \sum_{j=1}^4 a_j x_j = \underbrace{\hspace{10em}}_?.$$

15. $\sum_{k=3}^6 2^k = \underset{\text{con } k=3}{2^k} + \underset{\text{con } k=4}{} + \underset{\text{con } k=5}{} + \underset{\text{con } k=6}{}$

16. $\sum_{k=2}^4 a_k =$

Sumas que dependen de parámetros

17. Ejemplo. Puede ser que los sumandos dependen de algún parámetro:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 (a+j)^2 &= (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 \\ &= (a^2 + 2a + 1) + (a^2 + 4a + 4) + (a^2 + 6a + 9) = 3a^2 + 12a + 14.\end{aligned}$$

Nótese que la suma depende del parámetro a , y este parámetro aparece en la respuesta; pero la variable j existe solamente dentro de la notación \sum y no aparece en la respuesta.

18. Ejemplo.

La primera suma depende de k (k aparece en la respuesta); la segunda depende de i :

$$\sum_{j=1}^4 A_{k,j} = A_{k,1} + A_{k,2} + A_{k,3} + A_{k,4}; \quad \sum_{j=1}^3 A_{i,j} x_j = \underbrace{\hspace{10em}}_?$$

19. Ejemplos: escribir con \sum .

$$A_{2,1}c_1 + A_{2,2}c_2 = \sum_{j=1}^2 A_{2,j}c_j. \quad c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = \sum_{j=3}^7 \underbrace{\hspace{2em}}_?$$

$$a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = \sum \underbrace{\hspace{2em}}_?. \quad b_1c_2 + b_2c_3 + b_3c_4 + b_4c_5 = \sum \underbrace{\hspace{2em}}_?.$$

Sumas sobre conjuntos finitos de índices

Ejemplo.

$$\sum_{j \in \{2,5,7,8,12\}} a_j = a_2 + a_5 + a_7 + a_8 + a_{12}.$$

20. Calcule la siguiente suma: $\sum_{k \in \{2,3,6\}} \frac{1}{k} =$

21. Escriba la siguiente suma de manera explícita:

$$\sum_{k \in \{1,4,5,7,10,11\}} a_k =$$

22. Escriba la siguiente suma en forma breve usando la notación \sum :

$$b_3 + b_5 + b_6 + b_9 + b_{10} + b_{12} =$$

Ejemplo. A veces es cómodo describir el conjunto de índices por medio de ciertas condiciones.

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq k \leq 10 \\ k \text{ es primo}}} a_k = \sum_{k \in \{2,3,5,7\}} a_k = a_2 + a_3 + a_5 + a_7.$$

Ejemplo. Por lo común la condición $k \in \mathbb{Z}$ se omite:

$$\sum_{3 \leq k < 6} a_k = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 3 \leq k < 6}} a_k = \sum_{k \in \{3,4,5\}} a_k = a_3 + a_4 + a_5.$$

23. Escriba la siguiente suma de manera explícita (aquí la notación $k \mid 10$ significa que k divide a 10):

$$\sum_{k > 0, k \mid 10} a_k =$$