Algunos elementos de lógica con cuantificadores

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

14 de febrero de 2024

Objetivo:

repasar algunas reglas sobre los predicados y cuantificadores.

Prerrequisitos:

operaciones lógicas, predicados, cuantificadores.

Las leyes de De Morgan

Sea $P\colon A \to \{0,1\}$ un predicado.

$$\overline{\forall \alpha \in A \qquad P(\alpha)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \alpha \in A \quad \overline{P(\alpha)}.$$

$$\overline{\exists \alpha \in A \qquad P(\alpha)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \alpha \in A \quad \overline{P(\alpha)}.$$

Interacción de $\forall$ con $\wedge$, interacción de $\forall$ con $\vee$

Sean $P, Q\colon A \to \{0,1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\Big) \qquad\qquad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \;\wedge\; \Big(\forall \alpha \in A \quad Q(\alpha)\Big).$$

Interacción de $\forall$ con $\wedge$, interacción de $\forall$ con $\vee$

Sean $P, Q \colon A \to \{0,1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)\big) \ \wedge \ \big(\forall \alpha \in A \quad Q(\alpha)\big).$$

Interacción de $\forall$ con $\wedge$, interacción de $\forall$ con $\vee$

Sean $P, Q\colon A \to \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)\big) \ \wedge \ \big(\forall \alpha \in A \quad Q(\alpha)\big).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \big(P(\alpha) \vee Q(\alpha)\big) \qquad\qquad \big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)\big) \ \vee \ \big(\forall \alpha \in A \quad Q(\alpha)\big).$$

Interacción de $\forall$ con $\wedge$, interacción de $\forall$ con $\vee$

Sean $P, Q\colon A \to \{0,1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \;\wedge\; \Big(\forall \alpha \in A \quad Q(\alpha)\Big).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \vee Q(\alpha)\Big) \qquad \Longleftarrow \qquad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \;\vee\; \Big(\forall \alpha \in A \quad Q(\alpha)\Big).$$

Interacción de $\exists$ con $\wedge$, interacción de $\exists$ con $\vee$

Sean $P, Q\colon A \to \{0,1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\Big) \qquad\qquad \Big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \ \wedge \ \Big(\exists \alpha \in A \quad Q(\alpha)\Big).$$

Interacción de $\exists$ con $\wedge$, interacción de $\exists$ con $\vee$

Sean $P, Q\colon A \to \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)\big) \wedge \big(\exists \alpha \in A \quad Q(\alpha)\big).$$

Interacción de $\exists$ con $\wedge$, interacción de $\exists$ con $\vee$

Sean $P, Q\colon A \to \{0,1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)\big) \ \wedge \ \big(\exists \alpha \in A \quad Q(\alpha)\big).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \big(P(\alpha) \vee Q(\alpha)\big) \qquad\qquad \big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)\big) \ \vee \ \big(\exists \alpha \in A \quad Q(\alpha)\big).$$

Interacción de $\exists$ con $\wedge$,   interacción de $\exists$ con $\vee$

Sean $P, Q\colon A \to \{0,1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)\big) \ \wedge\ \big(\exists \alpha \in A \quad Q(\alpha)\big).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \big(P(\alpha) \vee Q(\alpha)\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)\big) \ \vee\ \big(\exists \alpha \in A \quad Q(\alpha)\big).$$

Las leyes distributivas para los cuantificadores

Sea $P\colon A \to \{0,1\}$ un predicado y sea q una afirmación.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \ \lor \ q \Big) \qquad\qquad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha) \Big) \ \lor \ q.$$

Las leyes distributivas para los cuantificadores

Sea $P\colon A \to \{0,1\}$ un predicado y sea q una afirmación.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \ \vee \ q \Big) \quad \iff \quad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha) \Big) \ \vee \ q.$$

Las leyes distributivas para los cuantificadores

Sea $P\colon A \to \{0,1\}$ un predicado y sea q una afirmación.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \;\vee\; q \Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha) \Big) \;\vee\; q.$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \;\wedge\; q \Big) \qquad\qquad \Big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha) \Big) \;\wedge\; q.$$

Las leyes distributivas para los cuantificadores

Sea $P\colon A \to \{0,1\}$ un predicado y sea q una afirmación.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \qquad \Big(P(\alpha) \ \vee \ q \Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha) \Big) \ \vee \ q.$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \qquad \Big(P(\alpha) \ \wedge \ q \Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha) \Big) \ \wedge \ q.$$

Interacción entre $\forall$ y $\forall$, interacción entre $\exists$ y $\exists$

Sea $P\colon A \times B \to \{0,1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \qquad \forall \beta \in B \qquad P(\alpha,\beta) \qquad\qquad \forall \beta \in B \qquad \forall \alpha \in A \qquad P(\alpha,\beta).$$

Interacción entre $\forall$ y $\forall$, interacción entre $\exists$ y $\exists$

Sea $P\colon A \times B \to \{0, 1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \forall \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \beta \in B \quad \forall \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Interacción entre $\forall$ y $\forall$, interacción entre $\exists$ y $\exists$

Sea $P\colon A \times B \to \{0,1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \forall \beta \in B \quad P(\alpha,\beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \beta \in B \quad \forall \alpha \in A \quad P(\alpha,\beta).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \exists \beta \in B \quad P(\alpha,\beta) \qquad\qquad \exists \beta \in B \quad \exists \alpha \in A \quad P(\alpha,\beta).$$

Interacción entre $\forall$ y $\forall$, interacción entre $\exists$ y $\exists$

Sea $P\colon A \times B \to \{0, 1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \forall \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \beta \in B \quad \forall \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \exists \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \beta \in B \quad \exists \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Interacción entre $\forall$ y $\exists$

Sea $P\colon A \times B \to \{0,1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \qquad \exists \beta \in B \qquad P(\alpha,\beta) \qquad\qquad \exists \beta \in B \qquad \forall \alpha \in A \qquad P(\alpha,\beta).$$

Interacción entre $\forall$ y $\exists$

Sea $P\colon A \times B \to \{0,1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \qquad \exists \beta \in B \qquad P(\alpha, \beta) \qquad \Longleftarrow \qquad \exists \beta \in B \qquad \forall \alpha \in A \qquad P(\alpha, \beta).$$