Método de los Intervalos para resolver desigualdades

Objetivos. Aprender el método de los intervalos para resolver desigualdades.

Requisitos. Desigualdades, teorema del valor intermedio.

El *Método de los Intervalos* se utiliza para resolver desigualdades de la forma

$$\frac{g(x)}{h(x)} > 0,$$

donde g y h son funciones continuas cuyas raíces se saben o se pueden encontrar fácilmente.

1. Teorema del valor intermedio.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea f una función real valuada definida y continua en el intervalo $[a, b]$ tal que sus valores en los puntos a y b tienen signos opuestos:

$$\Bigl(f(a) > 0 \quad \text{y} \quad f(b)\underbrace{\qquad}_{?}0\Bigr) \qquad \text{o} \qquad \Bigl(\qquad\qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad\qquad\Bigr)$$

o sea

$$f(a)f(b)\underbrace{\qquad}_{?}0.$$

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

2. Ejemplo de aplicación del teorema del valor intermedio.
Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla:

$$f(x) = 2^x - x.$$

Se sabe que esta función es continua en $\mathbb{R}$. Notemos que

$$f(-1) = \qquad \underbrace{\qquad}_{?}0, \qquad\qquad f(0) = \qquad \underbrace{\qquad}_{?}0.$$

Por el teorema del valor intermedio, ...

3. Corolario del teorema del valor intermedio. Sea X un intervalo del eje real y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua que no se anula en ningún punto del intervalo X. Entonces f no cambia su signo en el intervalo X, esto es, para todo par de puntos $a, b \in X$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(a)f(b) \underbrace{\qquad}_{?} 0.$$

4. Demostración del corolario. Sean $a, b \in X$. Hay tres casos: 1) $a = b$, 2) $a < b$; 3) $a > b$. Si $a = b$, entonces

$$f(a)f(b) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{?} 0.$$

De los casos 2) y 3) consideremos solamente el caso 2), porque a y b hacen papeles simétricos. Tenemos por demostrar que

$$f(a)f(b) \underbrace{\qquad}_{?} 0.$$

Razonando por contradicción supongamos que

$$f(a)f(b) \underbrace{\qquad}_{?} 0.$$

Aplicando el teorema del valor intermedio

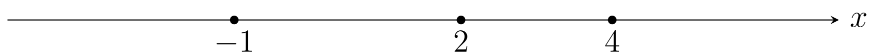
$$\text{a la función} \quad \underbrace{\qquad}_{?} \quad \text{en el intervalo} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{?},$$

obtenemos que …

Ejemplo. Resolver la desigualdad

$$(x-4)(x-2)(x+1) \geq 0. \tag{1}$$

Solución. La función $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y se anula en los puntos -1, 2 y 4:



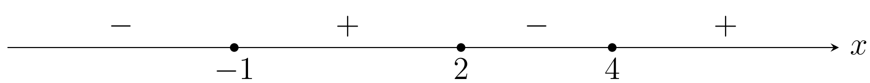
En cada uno de los intervalos abiertos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, 4)$ y $(4, +\infty)$ la función f es continua y no se anula. Por el corolario del teorema del valor intermedio la función f conserva su signo en cada uno de estos intervalos.

Para determinar los signos de los valores de la función f es suficiente elegir un punto en cada uno de los intervalos y evaluar f en el punto elegido:

$$f(-3) = (-7)(-5)(-2) < 0, \qquad f(0) = (-4)(-2)(1) > 0,$$

$$f(3) = (-1)(1)(4) < 0, \qquad f(5) = (1)(3)(6) > 0.$$

Ahora ya sabemos los signos de f:



Para escribir la respuesta unimos los intervalos en los cuales $f(x) > 0$ y añadimos los puntos en los cuales $f(x) = 0$ porque la desigualdad original (1) es no estricta.

Respuesta: $x \in [-1, 2] \cup [4, +\infty)$. $\square$

5. Resuelva la desigualdad:

$$(x+1)(x-3) \leq 0.$$

6. Resuelva la desigualdad:

$$(x+2)(x-1)(x-5) \geq 0.$$

Ejemplo. Resolver la desigualdad

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 0.$$

Solución. La función

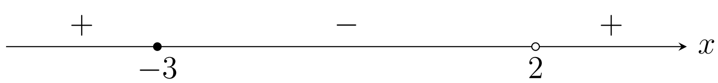
$$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

está definida para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ y se anula en el punto -3. El punto 2 no es solución de la desigualdad y el punto -3 es una solución pues la desigualdad es no estricta.

En cada uno de los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$ y $(2, +\infty)$ la función f es continua y no se anula. Del teorema del valor intermedio sigue que la función f conserva su signo en cada uno de estos intervalos.

$$f(-10) = \frac{-}{-} > 0, \qquad f(-1) = \frac{+}{-} < 0, \qquad f(10) = \frac{+}{+} > 0.$$

Ya podemos determinar los signos de f:



Respuesta: $x \in (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$. $\square$

Resuelva las desigualdades:

7. $\dfrac{x-4}{(x+1)^2} \leq 0.$

8. $\dfrac{x}{(x-3)(x+4)} \geq 0.$

9. Resuelva la desigualdad:

$$\frac{3^x - 9}{(x+1)(x-4)} \leq 0.$$