Operaciones con conjuntos (ejercicios)

Ejemplo: Definición de la diferencia de conjuntos.
Sean A y B conjuntos. Entonces

$$A \setminus B \coloneqq \{x\colon\ x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}.$$

Esto significa que para todo x tenemos la siguiente equivalencia:

$$x \in A \setminus B \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in A \quad \wedge \quad x \notin B.$$

1. Definición de la unión de conjuntos.
Sean A y B conjuntos. Entonces

$$A \cup B \coloneqq \{x\colon \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}.$$

2. Definición de la intersección de conjuntos.
Sean A y B conjuntos. Entonces

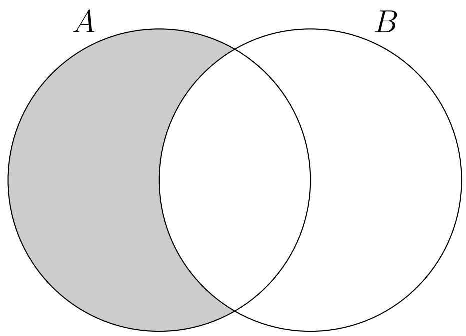
$$A \cap B \coloneqq \{x\colon \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}.$$

3. Indique las correspondencias con flechitas:

$x \in A \cup B$	x pertenece a ambos conjuntos A y B
$x \in A \cap B$	x pertenece al conjunto A pero no pertenece a B
$x \in A \setminus B$	x pertenece por lo menos a uno de los conjuntos A y B

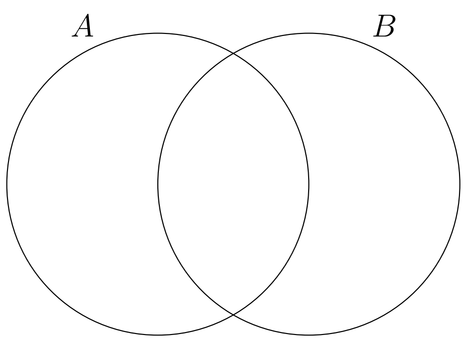
Diagramas de Euler-Venn

Ejemplo: Diferencia de conjuntos.



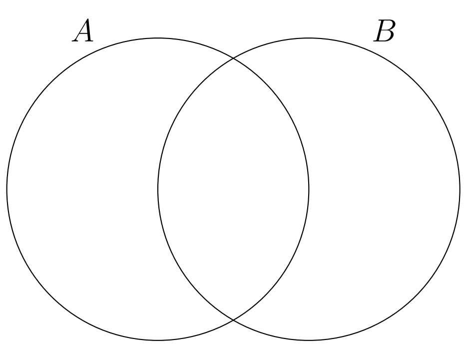
$A \setminus B$ consiste de todos los puntos
que pertenecen al conjunto A
y al mismo tiempo
no pertenecen al conjunto B.

4. Unión de conjuntos.



$A \cup B$ consiste de todos los puntos ...

5. Intersección de conjuntos.



$A \cap B$ consiste de todos los puntos ...

Relaciones de contención
entre la intersección, la unión y los conjuntos originales

Cómo demostrar la contención de un conjunto en el otro. Sean A y B conjuntos. Se dice que A *está contenido* en B si cualquier elemento del conjunto A pertenece también al conjunto B. Formalmente esto significa que para cualquier x la afirmación $x \in A$ implica la afirmación $x \in B$.

Ejemplo. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demostrar que

$$A \cap B \subseteq A.$$

Solución. Plan de la demostración: considerar un elemento arbitrario del conjunto $A \cap B$ y demostrar que este elemento pertenece al conjunto A.

Sea $x \in A \cap B$.
Por definición de la intersección esto significa que $x \in A$ y $x \in B$.
En particular, esto implica que $x \in A$. □

6. En la demostración anterior se usa la regla lógica

$$(a \quad \wedge \quad b) \quad \to \quad a.$$

Demuestre esta regla usando tablas de verdad.

Solución.

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \to a$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

□

7. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demuestre que

$$A \subseteq A \cup B.$$

Indique que regla lógica se usa en la demostración y demuéstrela con tablas de verdad.

Propiedades distributivas

Igualdad de conjuntos. Dos conjuntos A y B son *iguales* si consisten de los mismos elementos. Formalmente esto significa que para un x arbitrario las afirmaciones $x \in A$ y $x \in B$ son equivalentes.

Ejemplo (propiedad distributiva de la unión sobre la intersección). Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demostrar que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Solución. Para un x arbitrario tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) \quad &\overset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in A \quad \vee \quad (x \in B \cap C) \\
&\overset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in A \quad \vee \quad (x \in B \quad \wedge \quad x \in C) \\
&\overset{\text{(iii)}}{\Longleftrightarrow} \quad \big((x \in A) \vee (x \in B)\big) \wedge \big((x \in A) \vee (x \in C)\big) \\
&\overset{\text{(iv)}}{\Longleftrightarrow} \quad (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\
&\overset{\text{(v)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

En los pasos (i) y (iv) se usa la definición de la unión,
en los pasos (ii) y (v) se usa la definición de la intersección,
y en el paso (iii) se aplica la propiedad distributiva de la disyunción sobre conjunción:

$$a \ \vee \ \big(b \ \wedge \ c\big) = \big(a \ \vee \ b\big) \ \wedge \ \big(a \ \vee \ c\big). \qquad \square$$

8. Propiedad distributiva de la intersección sobre la unión. Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demuestre que

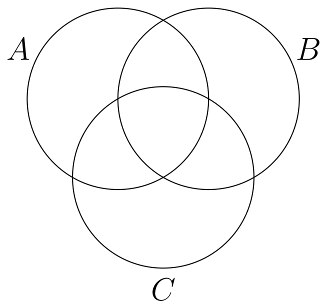
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Propiedades distributivas y diagramas de Euler-Venn

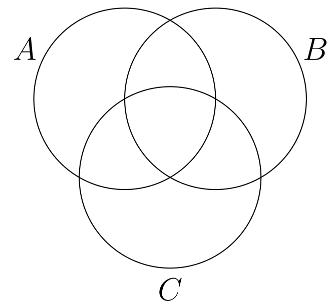
En los siguientes ejercicios hay que sombrear los conjuntos indicados.

9.

$B \cap C$

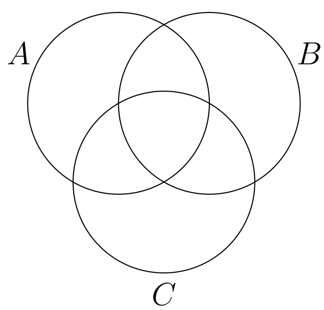


$A \cup (B \cap C)$

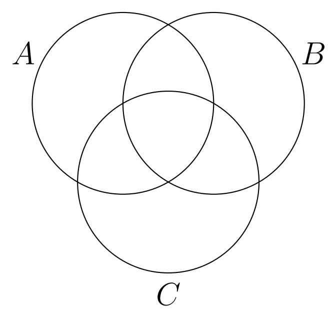


10.

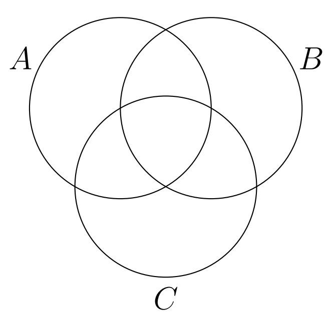
$A \cup B$



$A \cup C$



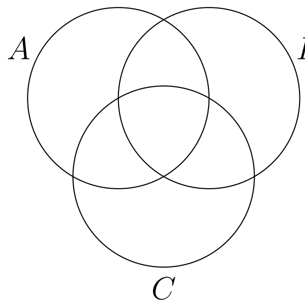
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



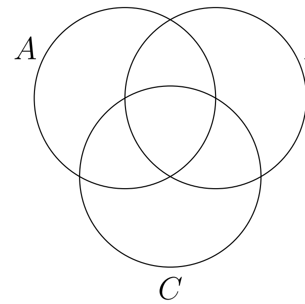
En los siguientes ejercicios hay que sombrear los conjuntos indicados.

11.

$B \cup C$

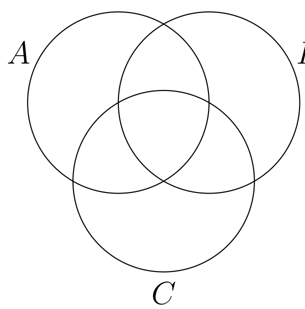


$A \cap (B \cup C)$

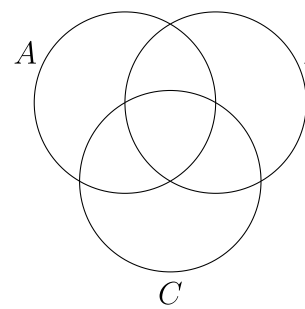


12.

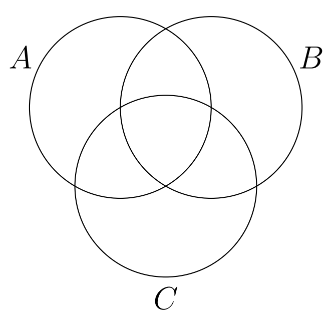
$A \cap B$



$A \cap C$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



Criterio de que un conjunto está contenido en el otro

Teorema. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A \subseteq B$;

(b) $A \cap B = A$;

(c) $A \cup B = B$;

(d) $A \setminus B = \emptyset$.

La demostración se divide en los siguientes ejercicios.

13. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \subseteq B$. Demuestre que $A \cap B = A$.

14. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \subseteq B$. Demuestre que $A \cup B = B$.

15. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \subseteq B$. Demuestre que $A \setminus B = \emptyset$.

16. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \cap B = A$. Demuestre que $A \subseteq B$.

17. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \cup B = B$. Demuestre que $A \subseteq B$.

18. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \setminus B = \emptyset$. Demuestre que $A \subseteq B$.