Cuantificadores sobre un conjunto finito (ejemplos)

Objetivos. Repasar el concepto de cuantificadores en el caso de un dominio finito.

En los ejemplos vamos a usar relaciones binarias, por eso primero repasamos rápidamente el concepto del producto cartesiano de conjuntos finitos.

Producto directo (producto cartesiano) de dos conjuntos

1. Pares ordenados (listas de dos elementos) y pares no ordenados (conjuntos de dos elementos). Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si esta es verdadera o falsa:

- $(3, 4) = (4, 3)$
- $(2\sqrt{5}, 3) = (\sqrt{20}, \log_2 8)$
- $\{3, 4\} = \{4, 3\}$

Definición (producto cartesiano). Sean A y B conjuntos. El producto cartesiano de los conjuntos A y B, denotado por $A \times B$, se define como el conjunto de todos los pares ordenados que tienen forma (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$.

Ejemplo. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\sqrt{2}, \sqrt{7}\}$. Entonces

$$A \times B = \{(1, \sqrt{2}), (1, \sqrt{7}), (2, \sqrt{2}), (2, \sqrt{7}), (3, \sqrt{2}), (3, \sqrt{7})\}.$$

2. Número de elementos en el producto cartesiano. Sean A y B conjuntos finitos que contienen m y n elementos respectivamente:

$$|A| = m, \qquad |B| = n.$$

¿Cuántos elementos contiene el producto cartesiano $A \times B$?

Cuadrado cartesiano de un conjunto

Notación. Sea A un conjunto. Entonces el producto cartesiano $A \times A$ se llama *cuadrado cartesiano* de A y se denota por A^2.

3. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Escriba todos los elementos de A^2.

4. Sea A un conjunto finito de n elementos. ¿Cuántos elementos contiene A^2?

Relaciones binarias

Definición (relación binaria sobre un conjunto). Una *relación binaria* sobre un conjunto X (en otras palabras, una relación binaria entre los elementos del conjunto X) se define como un subconjunto del "cuadrado cartesiano" $X^2 = X \times X$.

Ejemplo. Si X es un conjunto finito, entonces una relación binaria sobre X se puede dibujar como una tabla. Por ejemplo, el siguiente dibujo representa la relación binaria $R = \{(1,2),(1,3),(3,1)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3\}$:

	1	2	3
1		$\times$	$\times$
2			
3	$\times$		

5. Represente con un dibujo la relación binaria $R = \{(1,3),(2,1),(2,2),(2,4),(4,3)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3,4\}$.

Solución.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

$\square$

Demostrar proposiciones de la forma $\forall x \; P(x)$

Ejemplo. Se considera la relación binaria $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3\}$. Dibujar R como una tabla y demostrar que

$$\forall j \in \{1,2,3\} \qquad (3,j) \in R.$$

Dar una interpretación de esta afirmación en términos de las entradas de la tabla.

Solución.

	1	2	3
1	×	×	
2	×		
3	×	×	×

La relación R contiene todas las entradas de la tercera fila de la tabla. En otras palabras, la tercera fila está completamente en R:

$$(3,1),(3,2),(3,3) \in R. \qquad \square$$

6. Dibuje la relación $R = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3\}$ como una tabla.

	1	2	3
1			
2			
3			

7. Sea R la relación binaria del ejercicio anterior. Demuestre que

$$\forall i \in \{1,2,3\} \qquad (i,2) \in R.$$

Dé una interpretación de esta afirmación en términos de las entradas de la tabla.

Demostrar proposiciones de la forma $\exists x\ P(x)$

Ejemplo. Se considera la relación binaria $R = \{(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3\}$. Dibujar R como una tabla y demostrar que

$$\exists j \in \{1,2,3\} \qquad (2,j) \in R.$$

Dar una interpretación de esta afirmación en términos de las entradas de la tabla.

Primera solución. $(2,3) \in R$. Con palabras: En la segunda fila de la tabla hay por lo menos una entrada marcada, es decir, por lo menos un elemento de R.

	1	2	3
1			
2	×		×
3		×	×

$\square$

Segunda solución. $(2,1) \in R$.

	1	2	3
1			
2	×		×
3		×	×

$\square$

8. Se considera la relación binaria $R = \{(1,3),(2,1),(2,3)\}$ sobre el conjunto $\{1,2,3\}$. Dibuje R como una tabla y demuestre que

$$\exists i \in \{1,2,3\} \qquad (i,3) \in R.$$

Dé una interpretación de esta afirmación en términos de las entradas de la tabla.

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Refutar proposiciones de la forma $\forall x\ P(x)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$. Demostrar que la siguiente afirmación es falsa:

$$\forall i \in X \qquad (i, 2) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1		$\times$	
2	$\times$		$\times$
3		$\times$	

La afirmación dice que todos los elementos de la segunda columna están en R. Pero en realidad

$$(2, 2) \notin R,$$

así que **no todos** los elementos de la segunda columna están en R. $\square$

9. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Refute la siguiente proposición:

$$\forall j \in X \qquad (3, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

10. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Refute la siguiente proposición:

$$\forall i \in X \qquad (i, 1) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Refutar proposiciones de la forma $\exists x\ P(x)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$. Refutar la siguiente proposición:

$$\exists j \in X \qquad (3, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	$\times$		$\times$
2		$\times$	$\times$
3			

La proposición dice que en el tercer renglón hay al menos un elemento de R. Pero en realidad

$$(3, 1) \notin R, \qquad (3, 2) \notin R, \qquad (3, 3) \notin R,$$

así que en el tercer renglón **no hay ningún** elemento de R. $\square$

11. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$. Demuestre que la siguiente proposición es falsa:

$$\exists i \in X \qquad (i, 2) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

12. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. Refute la siguiente proposición:

$$\exists j \in X \qquad (1, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

En los siguientes ejercicios se trata de una relación binaria R sobre un conjunto finito X. La relación R está dibujada como una tabla.

Ejemplo. ¿Cómo demostrar una proposición de la forma $\forall x \in X \quad P(x)$?

- ✓ verificar que para todos los elementos x de X se cumple $P(x)$
- ○ verificar que para ningún elemento x de X se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual no se cumple $P(x)$

13. ¿Cómo demostrar una proposición de la forma $\exists x \in X \quad P(x)$?

- ○ verificar que para todos los elementos x de X se cumple $P(x)$
- ○ verificar que para ningún elemento x de X se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual no se cumple $P(x)$

14. ¿Cómo refutar una proposición de la forma $\forall x \in X \quad P(x)$?

- ○ verificar que para todos los elementos x de X se cumple $P(x)$
- ○ verificar que para ningún elemento x de X se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual no se cumple $P(x)$

15. ¿Cómo refutar una proposición de la forma $\exists x \in X \quad P(x)$?

- ○ verificar que para todos los elementos x de X se cumple $P(x)$
- ○ verificar que para ningún elemento x de X se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual no se cumple $P(x)$

Leyes de De Morgan para los cuantificadores

16. Notaciones y sus significados. Indique con flechitas las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\overline{\forall x \in X \quad P(x)}$	para todo $x \in X$ no se cumple $P(x)$
$\overline{\exists x \in X \quad P(x)}$	existe al menos un $x \in X$ para el cual no se cumple $P(x)$
$\forall x \in X \quad \overline{P(x)}$	no es cierto que para todo $x \in X$ se cumple $P(x)$
$\exists x \in X \quad \overline{P(x)}$	no es cierto que para algún $x \in X$ se cumple $P(x)$

17. Leyes de De Morgan. Indique con flechitas dos pares de proposiciones equivalentes:

$\overline{\forall x \in X \quad P(x)}$	$\forall x \in X \quad \overline{P(x)}$
$\overline{\exists x \in X \quad P(x)}$	$\exists x \in X \quad \overline{P(x)}$

Demostrar o refutar afirmaciones de la forma $\forall x\ P(x)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$. Demostrar o refutar la siguiente afirmación:

$$\forall i \in X \quad (i, 1) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	$\times$		$\times$
2		$\times$	
3	$\times$		

Tenemos por determinar, si todas las entradas de la primera columna están en R o no.

Vemos que no todas. Por ejemplo, $(2, 1) \notin R$.

Conclusión: la afirmación es falsa. En realidad,

$$\exists i \in X \quad (i, 1) \notin R.$$

□

18. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Dibuje R como una tabla.

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

Consideremos los mismos X y R que en el ejercicio anterior. Para cada una de las siguientes tres afirmaciones determine si esta es verdadera o falsa.

19. $\forall j \in X \qquad (2, j) \in R.$

20. $\forall i \in X \qquad (i, 3) \in R.$

21. $\forall j \in X \qquad (1, j) \in R.$

Demostrar o refutar afirmaciones de la forma $\exists x\ P(x)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (3, 3)\}$. Demostrar o refutar la siguiente afirmación:

$$\exists j \in X \quad (2, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1		$\times$	
2			
3			$\times$

Tenemos por determinar, si hay o no algún elemento de R en el segundo renglón.

Se ve de la tabla que ningún elemento del segundo renglón pertenece a R:

$$(2, 1) \notin R, \quad (2, 2) \notin R, \quad (2, 3) \notin R.$$

Conclusión: La afirmación es falsa. En realidad,

$$\forall j \in X \quad (2, j) \notin R. \qquad \square$$

22. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(2, 1), (3, 2)\}$. Dibuje R como una tabla.

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Consideremos los mismos X y R que en el ejercicio anterior. Para cada una de las siguientes tres afirmaciones determine si esta es verdadera o falsa.

23. $\exists j \in X \qquad (2, j) \in R.$

24. $\exists i \in X \qquad (i, 3) \in R.$

25. $\exists j \in X \qquad (1, j) \in R.$

Afirmaciones de las formas $\forall x\ \forall y\ P(x, y)$ y $\exists x\ \exists y\ P(x, y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$. Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

$$\forall i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución. La afirmación dice que $(i, j) \in R$ para cualesquiera i y j. Pero esto es falso. Por ejemplo, $(2, 3) \notin R$.

	1	2	3
1	×	×	×
2	×	×	
3		×	×

□

26. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Construya una relación binaria R sobre X tal que

$$\forall i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

27. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Construya una relación binaria R sobre X tal que

$$\exists i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

Demostrar proposiciones de la forma $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Demostrar que

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	$\times$	$\times$	
2			$\times$
3	$\times$		

Hay que mostrar que en cada renglón de la tabla hay por lo menos un elemento de R:

$$(1, 1) \in R, \quad (2, 3) \in R, \quad (3, 1) \in R. \qquad \square$$

28. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Demuestre que

$$\forall j \in X \quad \exists i \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

29. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Demuestre que

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Refutar proposiciones de la forma $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 2)\}$. Refutar la siguiente proposición:

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	$\times$		$\times$
2			
3		$\times$	

La proposición dice que en cada renglón de la tabla hay por lo menos un elemento de R. Pero en realidad el segundo renglón no contiene ningún elemento de R:

$$(2, 1) \notin R, \quad (2, 2) \notin R, \quad (2, 3) \notin R. \qquad \square$$

30. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$. Refute la siguiente afirmación:

$$\forall j \in X \quad \exists i \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

31. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Refute la siguiente afirmación:

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Demostrar o refutar proposiciones de la forma $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,2)\}$. Demostrar o refutar la siguiente proposición:

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	$\times$		$\times$
2		$\times$	
3		$\times$	

La proposición dice que en cada renglón de la tabla hay por lo menos un elemento de R. En realidad, así es:

$$(1,1) \in R, \quad (2,2) \in R, \quad (3,2) \in R.$$

□

32. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,2),(2,1),(3,2),(3,3)\}$. Demuestre o refute la siguiente afirmación:

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

33. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$. Demuestre o refute la siguiente afirmación:

$$\forall j \in X \quad \exists i \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

Demostrar proposiciones de la forma $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Demostrar que

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	$\times$		
2	$\times$	$\times$	$\times$
3	$\times$		$\times$

La proposición dice que hay un renglón que completamente está en R. En realidad, todas las entradas del segundo renglón están en R:

$$(2, 1) \in R, \quad (2, 2) \in R, \quad (2, 3) \in R.$$

$\square$

34. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$. Demuestre la siguiente proposición:

$$\exists j \in X \quad \forall i \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

35. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Demuestre la siguiente proposición:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Refutar proposiciones de la forma $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Demostrar que la siguiente afirmación es falsa:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	×	○	×
2		×	○
3	×	○	×

La proposición dice que hay un renglón que completamente está en R. Pero en realidad ninguno de los renglones está completamente en R. En cada renglón hay al menos una entrada que no pertenece a R:

$$(1, 2) \notin R, \quad (2, 3) \notin R, \quad (3, 2) \notin R.$$

□

36. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$. Demuestre que la siguiente proposición es falsa:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

37. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Demuestre que la siguiente proposición es falsa:

$$\exists j \in X \quad \forall i \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

En los siguientes ejercicios se trata de una relación binaria R sobre un conjunto finito X. La relación R está dibujada como una tabla.

Ejemplo. ¿Cómo demostrar una proposición de la forma $\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad P(x, y)$?

- ☑ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que se cumple $P(x, y)$
- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x, y)$

38. ¿Cómo demostrar una proposición de la forma $\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad P(x, y)$?

- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que se cumple $P(x, y)$
- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x, y)$

39. ¿Cómo refutar una proposición de la forma $\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad P(x, y)$?

- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que se cumple $P(x, y)$
- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x, y)$

40. ¿Cómo refutar una proposición de la forma $\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad P(x, y)$?

- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que se cumple $P(x, y)$
- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x, y)$

41. Notaciones y sus significados. Indique con flechitas las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\overline{\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad P(x,y)}$	para todo $x \in X$ existe un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x,y)$
$\overline{\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad P(x,y)}$	existe al menos un $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x,y)$
$\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad \overline{P(x,y)}$	no es cierto que existe un $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x,y)$
$\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad \overline{P(x,y)}$	no es cierto que para todo $x \in X$ existe un $y \in X$ tal que se cumple $P(x,y)$

42. Indique con flechitas dos pares de proposiciones equivalentes:

$\overline{\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad P(x,y)}$	$\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad \overline{P(x,y)}$
$\overline{\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad P(x,y)}$	$\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad \overline{P(x,y)}$

Demostrar o refutar proposiciones de la forma $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}$. Demostrar o refutar la siguiente proposición:

$$\exists j \in X \quad \forall i \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	×		×
2	×	×	×
3	×		×

La proposición dice que hay una columna que completamente está en R. En efecto, todas las entradas de la primera columna están en R:

$$(1,1) \in R, \quad (2,1) \in R, \quad (3,1) \in R.$$

También la tercera columna está en R. □

43. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}$. Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

44. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$. Demuestre o refute la siguiente proposición:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□