Operaciones lógicas principales:
negación, conjunción y disyunción

Definiciones informales.

$$\begin{array}{rlclclcl}
\neg A & \text{es verdadera} & \iff & A & \text{es falsa} & & & \\
A \wedge B & \text{es verdadera} & \iff & A & \text{es verdadera} & \textbf{y} & B & \text{es verdadera} \\
A \vee B & \text{es verdadera} & \iff & A & \text{es verdadera} & \textbf{o} & B & \text{es verdadera}
\end{array}$$

La palabra *o* se usa aquí en el sentido *no exclusivo*: si ambas A y B son verdaderas, entonces $A \vee B$ también.

1. Dibuje con flechitas las correspondencias entre las notaciones y sus significados:

$\boxed{A \wedge B}$ $\boxed{\text{por lo menos una de las proposiciones } A \text{ y } B \text{ es verdadera}}$

$\boxed{A \vee B}$ $\boxed{\text{ambas proposiciones } A \text{ y } B \text{ son verdaderas}}$

Tablas de verdad

Tablas de verdad para la Negación y la Conjunción. La operación unaria Negación y la operación binaria Conjunción se definen mediante las siguientes tablas de verdad (escribimos 0 para Falso y 1 para Verdadero):

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La negación de A también se denota por $\bar{A}$.

2. Tabla de verdad para la Disyunción. Rellene la tabla de verdad para la operación binaria Disyunción ($\vee$).

A	B	$A \vee B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Cálculo de los valores de expresiones lógicas

3. Recuerde las definiciones informales de las operaciones $\neg$, $\wedge$ y $\vee$:

$$\begin{array}{rcl} \neg A & \text{es verdadera} & \Longleftrightarrow \\ A \wedge B & \text{es verdadera} & \Longleftrightarrow \\ A \vee B & \text{es verdadera} & \Longleftrightarrow \end{array}$$

4. Repaso. Llene las tablas de verdad las cuales sirven como definiciones formales de las operaciones $\neg$, $\wedge$ y $\vee$:

A	$\neg A$
0	
1	

A	B	$A \wedge B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

A	B	$A \vee B$

Ejemplo. Calcule el valor de la expresión

$$(a \wedge b) \vee (\neg a)$$

si $a = 0$ y $b = 0$.

Solución. La conjunción $a \wedge b$ es 1 sólo en el caso si ambas a y b son 1. En nuestro ejemplo no es así, por lo tanto

$$a \wedge b = 0 \wedge 0 = 0.$$

Como $a = 0$, por definición de $\neg a$ tenemos que

$$\neg a = \neg 0 = 1.$$

Para calcular $(a \wedge b) \vee (\neg a)$ recordamos que la disyunción tiene valor 1 cuando *por lo menos* uno de sus argumentos es 1. En nuestro caso $\neg a = 1$, así que

$$(a \wedge b) \vee (\neg a) = 0 \vee 1 = 1.$$

Por supuesto, en vez de recordar de las definiciones informales de las operaciones $\neg$, $\wedge$ y $\vee$, uno puede tomar los valores necesarios de sus tablas de verdad. $\square$

5. Calcule el valor de la expresión $a \vee (\neg b)$ si $a = 0$ y $b = 1$.

Solución. Primero calculamos $\neg b =$, luego $a \vee (\neg b) =$. $\square$

6. Calcule el valor de la expresión $a \wedge (\neg a)$ si $a = 1$.

Solución. $\neg a =$, $a \wedge (\neg a) =$. $\square$

Ejemplos de teoremas de lógica matemática (leyes de dualidad)

Ejemplo. Demostremos que para todo $a \in \{0, 1\}$

$$a \vee (\neg a) = 1.$$

Solución. Calculamos los valores de la expresión $a \vee (\neg a)$ para todos los valores de a. Por supuesto, vamos a aplicar las definiciones de $\vee$ y $\neg$.

Por ejemplo, si $a = 0$, entonces por definición de $\neg$ tenemos que $\neg a = 1$. Para calcular el valor de $a \vee (\neg a)$ notamos que entre las expresiones a y $\neg a$ al menos una (a saber, $\neg a$) tiene valor 1, luego por definición de $\vee$ obtenemos que $a \vee (\neg a) = 1$.

Escribamos los cálculos en forma de tablas de verdad:

a	$\neg a$	$a \vee (\neg a)$
0	1	1
1	0	1

$\square$

7. Demuestre que para todo $a \in \{0, 1\}$

$$a \wedge (\neg a) = 0.$$

Solución.

a	$\neg a$	$a \wedge (\neg a)$

$\square$

8. Ley de involución para la Negación. Demuestre que para todo $a \in \{0, 1\}$

$$\neg(\neg a) = a.$$

Solución.

a	$\neg a$	$\neg(\neg a)$

$\square$

Leyes de absorción

Vamos a demostrar dos teoremas de lógica matemática que se llaman *leyes de absorción* o *leyes de cancelación.*

Ejemplo. Demostremos que para todos $a, b \in \{0, 1\}$

$$(a \wedge b) \vee a = a.$$

Solución. Tenemos que calcular los valores de la expresión $(a \wedge b) \vee a$ para todo par ordenado de los valores de a y b.

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \vee a$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Al fin podemos ver que los contenidos de las columnas a y $(a \wedge b) \vee a$ coinciden:

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \vee a$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

□

9. Demuestre que para todos $a, b \in \{0, 1\}$

$$(a \vee b) \wedge a = a.$$

Solución.

a	b	$a \vee b$	$(a \vee b) \wedge a$

□

Leyes de De Morgan

10. Demuestre que para todos $a, b \in \{0, 1\}$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}.$$

Solución.

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} \wedge \overline{b}$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

$\square$

11. Demuestre que para todos $a, b \in \{0, 1\}$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}.$$

Solución.

a	b					

$\square$

12. Divida las siguientes cuatro proposiciones en dos pares de proposiciones equivalentes:

(i) no es cierto que se ambas proposiciones A y B son verdaderas;

(ii) no es cierto que es verdadera por lo menos una de las proposiciones A o B;

(iii) ambas proposiciones A y B son falsas;

(iv) por lo menos una de las proposiciones A y B es falsa.

Asociatividad

13. Asociatividad de la conjunción. Demuestre que para todos $a, b, c \in \{0, 1\}$,

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

Demostración.

a	b	c	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \wedge c$	$b \wedge c$	$a \wedge (b \wedge c)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

□

14. Asociatividad de la disyunción. Demuestre que para todos $a, b, c \in \{0, 1\}$,

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$$

Demostración.

a	b	c				

□

Notación. Las leyes de asociatividad permiten escribir $a \wedge b \wedge c$ en lugar de $(a \wedge b) \wedge c$ y $a \vee b \vee c$ en lugar de $(a \vee b) \vee c$.

15. Dibuje con flechitas las correspondencias entre las fórmulas y sus significados:

$A \wedge B \wedge C$ todas las tres proposiciones A, B y C son verdaderas

$A \vee B \vee C$ por lo menos una de las proposiciones A, B y C es verdadera