Intervalos del eje real

Definiciones de los intervalos: ejemplos.

$$(-\infty, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\};$$
$$(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \ \wedge \ x \le b\}.$$

Escriba las definiciones de los siguientes invervalos:

1. $(a, b) \coloneqq$

2. $(a, b] \coloneqq$

3. $[a, b) \coloneqq$

4. $[a, b] \coloneqq$

5. $(a, +\infty) \coloneqq$

6. $[a, +\infty) \coloneqq$

7. $(-\infty, b) \coloneqq$

8. $(-\infty, b] \coloneqq$

Demostraciones elementales con intervalos

Ejemplo. Demostrar que para todo $x \in (4, 7)$ se cumple la desigualdad $x > 2$.

Demostración.
Supongamos que $x \in (4, 7)$.
Por definición del intervalo $(4, 7)$ esto significa que $x > 4$ y $x < 7$.
En particular, esto implica que $x > 4$.
Notemos que $4 > 2$.
De las desigualdades $x > 4$ y $4 > 2$ por la propiedad transitiva sigue que $x > 2$. $\square$

9. Demuestre que para todo $x \in (3, 5)$ se cumple la desigualdad $x < 9$.

Intersecciones de los intervalos

Ejemplo. Demostrar que $(-\infty, -1) \cap (5, +\infty) = \varnothing$.

Demostración.
Por contradicción, supongamos que $x \in (-\infty, -1) \cap (5, +\infty)$.
Entonces $x < -1$ y $x > 5$.
Podemos reescribir estas desigualdades de otra manera: $5 < x$ y $x < -1$.
Por la transitividad de aquí sigue que $5 < -1$ que es falso. Contradicción. $\square$

10. Demuestre que $(-\infty, 3) \cap (5, +\infty) = \varnothing$.

Ejemplo. Demostrar que $(-\infty, 5) \cap (-\infty, 7) = (-\infty, 5)$.

Demostración.
La desigualdad $x < 5$ implica la desigualdad $x < 7$, por eso

$$\begin{cases} x < 5, \\ x < 7; \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < 5. \qquad \square$$

11. Demuestre que $(-1, +\infty) \cap (2, +\infty) = (2, +\infty)$.

Halle las siguientes intersecciones de intervalos:

12. $(-\infty, 7) \cap (9, +\infty) =$

13. $(-\infty, 11) \cap (6, +\infty) =$

14. $(-2, 5) \cap (1, 7) =$

15. $(-3, 4) \cap (6, 9) =$

16. $(-\infty, 7] \cap [7, +\infty) =$

17. $(-\infty, 5) \cap [5, +\infty) =$

Fórmulas generales para las intersecciones de los intervalos

Escriba fórmulas generales:

18. $(a, +\infty) \cap (-\infty, b) =$

19. $(a, +\infty) \cap (b, +\infty) =$

20. $(-\infty, a) \cap (-\infty, b) =$

21. $(a, b) \cap (b, c) =$

22. $[a, b] \cap [b, c] =$