

Desigualdad de las medias aritmética y geométrica de dos números

Objetivos. Demostrar la desigualdad de las medias aritmética y geométrica en el caso de dos números, conocer algunas aplicaciones.

1. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $x^2 \geq 0$.

Solución. Consideremos tres casos:

a) $x > 0$, b) , c) .

En el caso a), por la regla de los signos, $x^2 > 0$.

En el caso b),

En el caso c),

□

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que $(a - b)^2 \geq 0$.

Solución. Aplicamos la desigualdad general $x^2 \geq 0$ a $x =$.

□

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que $2ab \leq a^2 + b^2$.

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

5. **Desigualdad de las medias aritmética y geométrica de dos números.**

Sean $x, y > 0$. Demuestre que

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

Aplicación: Rectángulo con perímetro fijo y área máxima

Problema. Sea P un número positivo fijo. Vamos a demostrar que entre todos los rectángulos con perímetro P el cuadrado tiene el área mayor.

6. Perímetro del rectángulo. Recuerde cómo se expresa el perímetro P de un rectángulo a través de sus lados a y b :

$$P =$$

7. Área del rectángulo. Recuerde cómo se expresa al área de un rectángulo a través de sus lados a y b :

$$A =$$

8. Expresar el lado del cuadrado a través de su perímetro. Sea a el lado del cuadrado con perímetro P . Exprese P a través de a , luego exprese a a través de P :

$$P = \quad , \quad a =$$

9. Expresar el área del cuadrado a través de su perímetro. Exprese a través de a y luego a través de P el área del cuadrado con perímetro P :

$$A_{\square} =$$

10. Expresar la suma de dos lados contiguos del rectángulo a través de su perímetro. Sean a y b los lados de un rectángulo con perímetro P . Exprese P a través de a y b , luego exprese $a + b$ a través de P :

$$P = \quad , \quad a + b =$$

11. Muestre que el área del rectángulo con perímetro P es menor o igual que el área A_{\square} . Use los resultados de los ejercicios anteriores y la desigualdad de las medias aritmética y geométrica.