

# Desigualdades y operaciones aritméticas

## Desigualdades y la operación adición

Sumar un número a ambos lados de una desigualdad.

$$\text{Si } a < b \text{ y } c \in \mathbb{R}, \text{ entonces } a + c < b + c.$$

**Ejemplo.** Si  $a < 3$ , entonces  $a - 7 < -4$ .

**Ejemplo.** Si  $a + 4 > 1$ , entonces al sumar  $-4$  a ambos lados obtenemos que  $a > -3$ .

1. Si  $a \geq 5$ , entonces  $a + 2$

2. Si  $a < -3$ , entonces  $a + 4$

3. Si  $a + 7 > 2$ , entonces  $a$

Sumar desigualdades.

$$\text{Si } a < b \text{ y } c < d, \text{ entonces } a + c < b + d.$$

**Ejemplo.** Si  $a > 4$  y  $b > -3$ , entonces  $a + b > 1$ .

**Ejemplo.** Si  $a \leq 5$  y  $b < 2$ , entonces  $a + b < 7$ .

**Observación.** Sólo se suman las desigualdades que tienen el mismo sentido, es decir  $<$  con  $<$ ,  $>$  con  $>$ , también  $>$  con  $\geq$ , pero no  $<$  con  $\geq$ .

4. Si  $a > 3$  y  $b > -2$ , entonces  $a + b$

5. Si  $a \leq 5$  y  $b \leq 3$ , entonces  $a + b$

6. Si  $a < 3$  y  $1 > b$ , entonces  $a + b$

## Desigualdades y la operación multiplicación

**Multiplicar una desigualdad por un número positivo.**

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac < bc.$$

**Ejemplo.** Si  $a < 3$ , entonces  $5a < 15$ .

**Ejemplo.** Si  $a \geq -7$ , entonces  $2a \geq -14$ .

**Ejemplo.** Si  $3a \leq 5$ , entonces al multiplicar por  $\frac{1}{3}$  obtenemos que  $a \leq \frac{5}{3}$ .

7. Si  $a < -2$ , entonces  $3a$

8. Si  $a \geq 4$ , entonces  $7a$

9. Si  $3a < 12$ , entonces  $a$

**Multiplicar una desigualdad por un número negativo.**

Al multiplicar una desigualdad por un número negativo, se cambia el signo:

$$\text{Si } a < b \text{ y } c < 0, \text{ entonces } ac > bc.$$

**Ejemplo.** Si  $a < 3$ , entonces  $-3a > -9$ .

**Ejemplo.** Si  $-2a < -8$ , entonces al multiplicar por  $-\frac{1}{2}$  obtenemos que  $a > 4$ .

10. Si  $a \geq 5$ , entonces  $-2a$

11. Si  $a < -2$ , entonces  $-4a$

12. Si  $-3a > -12$ , entonces  $a$

13. Si  $-4a \leq 5$ , entonces  $a$

## Desigualdades y la operación sustracción

Restar dos desigualdades que tienen signos opuestos.

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > d, \text{ entonces } a - c < b - d.$$

*Demostración.* Primero podemos multiplicar la segunda desigualdad por  $(-1)$ , luego sumar el resultado con la primera desigualdad.  $\square$

**Ejemplo.** Si  $a < 3$  y  $b > 7$ , entonces  $-b < -7$  y  $a - b < -4$ .

**Ejemplo.** Si  $a \geq 5$  y  $b \leq -1$ , entonces  $-b \geq 1$  y  $a - b \geq 6$ .

14. Si  $a < 4$  y  $b \geq 3$ , entonces  $-b$  y  $a - b$

15. Si  $a \leq 7$  y  $b \geq -6$ , entonces  $-b$  y  $a - b$

## Desigualdades y la operación inversión

En una desigualdad con números positivos pasar a sus inversos.

$$\text{Si } a > 0, b > 0 \text{ y } a < b, \text{ entonces } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

*Demostración.* Multiplicar la desigualdad  $a < b$  por  $\frac{1}{a}$  y por  $\frac{1}{b}$ . □

**Ejemplo.** Si  $a > 7$ , entonces  $\frac{1}{a} < \frac{1}{7}$ .

**Ejemplo.** Si  $a > 0$  y  $a \leq 2$ , entonces  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{2}$ .

16. Si  $a > 0$  y  $a < 7$ , entonces  $\frac{1}{a}$

17. Si  $a \geq 3$ , entonces  $\frac{1}{a}$

En una desigualdad con números negativos pasar a sus inversos.

$$\text{Si } a < 0, b < 0 \text{ y } a < b, \text{ entonces } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

*Demostración.* Multiplicar por  $-1$ , pasar a los inversos y otra vez multiplicar por  $-1$ . □

**Ejemplo.** Si  $a < -3$ , entonces  $-a > 3$ , luego  $-\frac{1}{a} < \frac{1}{3}$  y por lo tanto  $\frac{1}{a} > -\frac{1}{3}$ .

18. Si  $a < 0$  y  $a > -5$ , entonces  $-a$  ,  $-\frac{1}{a}$  y  $\frac{1}{a}$

19. Si  $a \leq -\frac{1}{5}$ , entonces  $-a$  ,  $-\frac{1}{a}$  y  $\frac{1}{a}$

## Desigualdades y la operación división

Dividir una desigualdad entre otra con números positivos y signo opuesto.

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > d > 0, \text{ entonces } \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

*Demostración.* Pasar a los inversos en la segunda desigualdad:  $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$ , luego multiplicar por la primera.  $\square$

**Ejemplo.** Si  $a < 3$  y  $c > 2$ , entonces  $\frac{a}{c} < \frac{3}{2}$ .

**Ejemplo.** Si  $a > -5$  y  $0 < c < 4$ , entonces  $\frac{a}{c} > -\frac{5}{4}$ .

**20.** Si  $a \leq 6$  y  $b \geq 3$ , entonces  $\frac{1}{b}$  y  $\frac{a}{b}$

**21.** Si  $a > 7$  y  $0 < b < 4$ , entonces  $\frac{1}{b}$  y  $\frac{a}{b}$

**22.** Si  $a < 8$  y  $b \geq 5$ , entonces  $\frac{a}{b}$

**23.** Si  $a \geq -4$  y  $0 < b \leq 2$ , entonces  $\frac{a}{b}$

## Sumar desigualdades dobles

Sumar un número a todos lados de una cadena de desigualdades.

$$\text{Si } a < b < c, \text{ entonces } a + d < b + d < c + d.$$

*Demostración.* Sumar  $d$  a ambos lados de la desigualdad  $a < b$ , luego sumar  $d$  a ambos lados de la desigualdad  $b < c$ , juntar los resultados en una cadena.  $\square$

**Ejemplo.** Si  $-3 < a < 2$ , entonces  $-2 < a + 1 < 3$ .

24. Si  $5 \leq a < 7$ , entonces  $a + 3$

25. Si  $-2 \leq a \leq 3$ , entonces  $a - 4$

Sumar desigualdades dobles.

$$\text{Si } a < b < c \text{ y } d < e < f, \text{ entonces } a + d < b + e < c + f.$$

**Ejemplo.** Si  $-2 \leq a \leq 7$  y  $3 < b \leq 4$ , entonces  $1 < a + b \leq 11$ .

26. Si  $-5 \leq a < 1$  y  $-2 \leq b \leq 6$ , entonces  $a + b$

27. Si  $1 \leq a \leq 5$  y  $-8 \leq b \leq -7$ , entonces  $a + b$

## Multiplicar desigualdades dobles por un número

Multiplicar una desigualdad doble por un número positivo.

$$\text{Si } a < b < c \text{ y } d > 0, \text{ entonces } ad < bd < cd.$$

**Ejemplo.** Si  $-5 < a \leq 6$ , entonces  $-10 < 2a \leq 12$ .

**28.** Si  $-7 \leq a < -5$ , entonces  $3a$

**29.** Si  $-2 < 4a < 3$ , entonces  $a$

Multiplicar una desigualdad doble por un número negativo  
(se intercambian los lados).

$$\text{Si } a < b < c \text{ y } d < 0, \text{ entonces } cd < bd < ad.$$

**Ejemplo.** Si  $-2 \leq a < 3$ , entonces  $-12 < -4a \leq 8$ .

**30.** Si  $-7 < a \leq 4$ , entonces  $-5a$

**31.** Si  $-1 \leq -3a \leq 6$ , entonces  $a$

## Restar desigualdades dobles

De una desigualdad doble restar otra (se cruzan los lados).

$$\text{Si } a < b < c \text{ y } d < e < f, \text{ entonces } a - f < b - e < c - d.$$

*Demostración.* Al multiplicar la segunda desigualdad  $d < e < f$  por  $-1$  se obtiene que

$$-f < -e < -d.$$

Luego la última desigualdad se suma con  $a < b < c$ . □

**Ejemplo.** Si  $-2 < a \leq 3$  y  $4 \leq b \leq 5$ , entonces primero notemos que  $-5 \leq -b \leq -4$  y luego concluimos que  $-7 < a - b \leq -1$ .

**32.** Si  $-1 \leq a < 5$  y  $2 < b \leq 6$ , entonces  $-b$  y  $a - b$

**33.** Si  $6 < a < 7$  y  $-3 < b \leq 1$ , entonces  $-b$  y  $a - b$