Propiedades de imágenes y preimágenes

Objetivos. Demostrar las propiedades principales de las imágenes y preimágenes, por ejemplo que $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.

Requisitos. Definición y ejemplos de imágenes y preimágenes, lógica de proposiciones, lógica de predicados, operaciones con conjuntos, propiedades de las operaciones con conjuntos.

Lógica de proposiciones (repaso)

1. Simplifique: $a \wedge a =$

2. Simplifique: $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) =$

3. Indique las implicaciones verdaderas:

- ☑ $a \implies (a \vee b)$.
- ☐ $(a \vee b) \implies a$.
- ☐ $a \implies (a \wedge b)$.
- ☐ $(a \wedge b) \implies a$.

Existencia, disyunción y conjunción (repaso)

4. Sean P y Q predicados de una variable, es decir afirmaciones que dependen de un parámetro que denotemos por x. Indique las implicaciones verdaderas:

- ☐ $\exists x \quad (P(x) \wedge Q(x)) \implies \big(\exists x\ P(x)\big) \wedge \big(\exists x\ Q(x)\big)$.
- ☐ $\big(\exists x\ P(x)\big) \wedge \big(\exists x\ Q(x)\big) \implies \exists x \quad (P(x) \wedge Q(x))$.
- ☐ $\exists x \quad (P(x) \vee Q(x)) \implies \big(\exists x\ P(x)\big) \vee \big(\exists x\ Q(x)\big)$.
- ☐ $\big(\exists x\ P(x)\big) \vee \big(\exists x\ Q(x)\big) \implies \exists x \quad (P(x) \vee Q(x))$.

5. Resumiendo los resultados del ejercicio anterior ponga flechitas correctas ($\iff$ o $\implies$ o $\impliedby$) en lugar de ?:

$$\exists x \quad (P(x) \wedge Q(x)) \qquad ? \qquad \big(\exists x\ P(x)\big) \wedge \big(\exists x\ Q(x)\big)$$

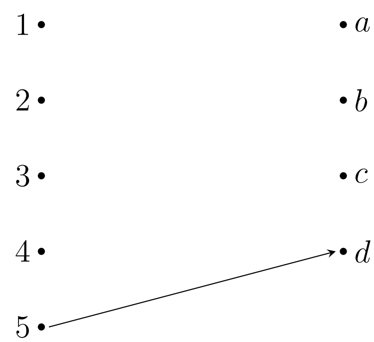
$$\exists x \quad (P(x) \vee Q(x)) \qquad ? \qquad \big(\exists x\ P(x)\big) \vee \big(\exists x\ Q(x)\big)$$

Imagen de un conjunto bajo una función, preimagen de un conjunto bajo una función: repaso de las definiciones

6. La función $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d\}$ está definida mediante las siguientes reglas:

$$f(1) = f(4) = b, \qquad f(2) = f(3) = c, \qquad f(5) = d.$$

Represente f con flechitas:



7. Determine las imágenes de los conjuntos $\{1,3\}$ y $\{2,3,4\}$ bajo la función f del ejercicio 6:

$$f[\{1,3\}] = \qquad\qquad\qquad\qquad f[\{2,3,4\}] =$$

8. Encuentre las preimágenes (o sea las imágenes inversas) de los conjuntos $\{b,c\}$ y $\{a,d\}$ bajo la función f del ejercicio 6:

$$f^{-1}[\{b,c\}] = \qquad\qquad\qquad\qquad f^{-1}[\{a,d\}] =$$

Note que $f^{-1}[\ldots]$ es una notación para la preimagen, no confunda con la función inversa. En este ejemplo la función inversa a f no existe, pues f no es inyectiva ni suprayectiva.

Sean X, Y y sea $f\colon X \to Y$ una función.

9. Sea $B \subseteq Y$. ¿Qué significa la condición que $x \in f^{-1}[B]$?

$$x \in f^{-1}[B] \qquad \Longleftrightarrow$$

10. Sea $A \subseteq X$. ¿Qué significa la condición que $y \in f[A]$?

$$y \in f[A] \qquad \Longleftrightarrow$$

Imagen y preimagen del conjunto vacío

Demostraciones con el conjunto vacío (repaso).

- ¿Cómo demostrar que un conjunto A es vacío?
  Hay que suponer que $x \in A$ y llegar a una contradicción.
- ¿Cómo usar una condición que un conjunto B es vacío?
  Si $B = \varnothing$, entonces para cualquier y la afirmación $y \in B$ es falsa.

11. Sea $f\colon X \to Y$ una función. Demuestre que

$$f[\varnothing] = \varnothing.$$

Solución. Razonando por contradicción supongamos que $y \in f[\varnothing]$.

Entonces por la definición de la imagen ...

$\square$

12. Sea $f\colon X \to Y$ una función. Demuestre que

$$f^{-1}[\varnothing] = \varnothing.$$

Preimagen de la unión

13. ¿Cómo demostrar la igualdad de dos conjuntos? (Repaso). Sean A_1 y A_2 subconjuntos de un conjunto X. ¿Cómo demostrar que $A_1 = A_2$? Indique los métodos correctos:

- ☑ Demostrar que $A_1 \subseteq A_2$ y $A_2 \subseteq A_1$.
- ☐ Demostrar que para todo $x \in X$ la afirmación $x \in A_1$ implica la afirmación $x \in A_2$.
- ☐ Demostrar que para todo $x \in X$ las afirmaciones $x \in A_1$ y $x \in A_2$ son equivalentes.
- ☐ Demostrar que para cualquier $x \in X$ la afirmación $x \in A_1$ implica que $x \in A_2$, y para cualquier $x \in X$ la afirmación $x \notin A_2$ implica que $x \notin A_1$.
- ☐ Demostrar que para cualquier $x \in X$ la afirmación $x \in A_1$ implica que $x \in A_2$, y para cualquier $x \in X$ la afirmación $x \notin A_1$ implica que $x \notin A_2$.

14. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sean $B_1, B_2 \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2].$$

Solución. Sea x un elemento arbitrario de X. Mostremos que las dos siguientes condiciones son equivalentes:

$$x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2].$$

De hecho,

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] \quad &\xLongleftrightarrow{\text{def. de la preimagen}} \quad f(x) \in \\
&\xLongleftrightarrow{\text{def. de la unión}} \\
&\Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Preimagen de la intersección

15. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sean $B_1, B_2 \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

Imagen de la unión

16. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sean $A_1, A_2 \subseteq X$. Demuestre que

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2].$$

Solución. Sea y un elemento arbitrario de Y. Mostremos que las condiciones

$$y \in f[A_1 \cup A_2] \qquad \text{y} \qquad y \in f[A_1] \cup f[A_2]$$

son equivalentes.

$$y \in f[A_1 \cup A_2]$$

$$\xLeftrightarrow{\text{def. de la imagen}} \quad \exists x \quad \Big((x \in A_1 \cup A_2) \quad \wedge \quad (f(x) = y)\Big)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{def. de la unión}} \quad \exists x \quad \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)$$

$$\xLeftrightarrow[(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)]{\text{prop. distributiva:}} \quad \exists x \quad \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)$$

$\exists x\ (P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow$

$$\xLeftrightarrow{\Leftrightarrow}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{def. de la imagen}} \quad (\qquad\qquad) \quad \vee \quad (\qquad\qquad)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y \in f[A_1] \cup f[A_2].$$

$\square$

Imagen de la intersección

17. Recuerde la relación lógica entre las dos siguientes afirmaciones:

$$\exists x \quad \big(P(x) \ \wedge \ Q(x)\big) \qquad \text{y} \qquad \big(\exists x \ P(x)\big) \quad \wedge \quad \big(\exists x \ Q(x)\big).$$

18. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sean $A_1, A_2 \subseteq X$. Demuestre que

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2].$$

Ejemplos cuando $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$

19. La función $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d\}$ está definida mediante las siguientes reglas:

$$f(1) = f(4) = b, \qquad f(2) = f(3) = c, \qquad f(5) = d.$$

$$\begin{array}{lcl}
1 \bullet & \qquad\qquad & \bullet\, a \\
2 \bullet & & \bullet\, b \\
3 \bullet & & \bullet\, c \\
4 \bullet & & \bullet\, d \\
5 \bullet & &
\end{array}$$

En los siguientes ejercicios se considera la función f del ejercicio 19. Se propone construir ejemplos de conjuntos A_1 y A_2 tales que $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$. Para conocer varias situaciones posibles se ponen condiciones adicionales que deben cumplir A_1 y A_2.

20. Encuentre conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] = \varnothing \qquad \wedge \qquad f[A_1] = f[A_2] = f[A_1] \cap f[A_2] \neq \varnothing.$$

21. Encuentre conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] = \varnothing \qquad \wedge \qquad f[A_1] \neq f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] \cap f[A_2] \neq \varnothing.$$

Seguimos considerando la función del ejercicio 19 y buscando ejemplos de conjuntos A_1 y A_2 tales que $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$.

$1 \bullet$	$\bullet\, a$
$2 \bullet$	$\bullet\, b$
$3 \bullet$	$\bullet\, c$
$4 \bullet$	$\bullet\, d$
$5 \bullet$	

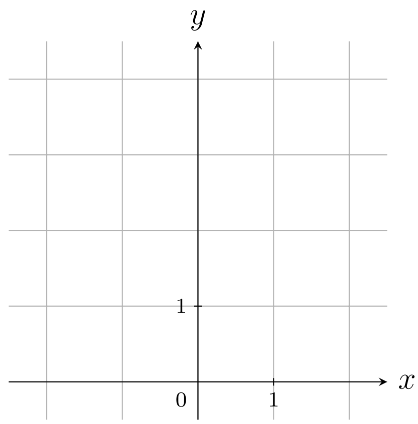
22. Encuentre conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \neq \varnothing \qquad \wedge \qquad f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] \neq f[A_2].$$

23. Encuentre conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \neq \varnothing \qquad \wedge \qquad f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] = f[A_2].$$

24. Dibuje la gráfica de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.



En los siguientes ejercicios se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y se pide construir ejemplos de conjuntos A_1, A_2 tales que $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$. Para conocer varias situaciones posibles se ponen condiciones adicionales.

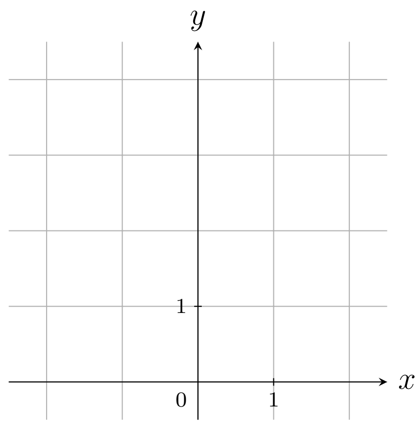
25. Construya conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] = \varnothing \qquad \wedge \qquad f[A_1] = f[A_2] = f[A_1] \cap f[A_2] \neq \varnothing.$$

26. Construya conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] = \varnothing \qquad \wedge \qquad f[A_1] \neq f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] \cap f[A_2] \neq \varnothing.$$

Seguimos considerando la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y construyendo ejemplos de conjuntos A_1 y A_2 tales que $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$.



27. Construya conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \neq \varnothing \qquad \wedge \qquad f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] \neq f[A_2].$$

28. Construya conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \neq \varnothing \qquad \wedge \qquad f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] = f[A_2].$$

Imagen de la preimagen

29. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $B \subseteq Y$. Demuestre que

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B.$$

Solución. Sea $y \in f[f^{-1}[B]]$.

Por la definición de la imagen, …

$\square$

30. Construya un ejemplo cuando $f[f^{-1}[B]] \neq B$.

Preimagen de la imagen

31. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $A \subseteq X$. Demuestre que

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]].$$

32. Construya un ejemplo cuando $A \neq f^{-1}[f[A]]$.