Imágenes y preimágenes de conjuntos finitos

Objetivos. Conocer los conceptos de la imagen de un conjunto bajo una función y de la preimagen de un conjunto bajo una función.

Requisitos. Concepto de la función, concepto del conjunto, definición de conjuntos por propiedades de sus elementos, lógica de predicados.

Definición de la preimagen de un conjunto bajo una función. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea B un subconjunto de su contradominio, es decir $B \subseteq Y$. Entonces la *preimagen* del conjunto B bajo la función f se define como el conjunto de todos los puntos $x \in X$ que la función f manda en B:

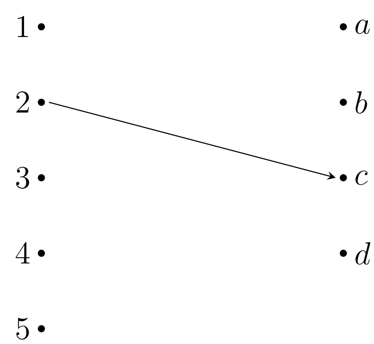
$$f^{-1}[B] \coloneqq \{x \in X \colon \quad f(x) \in B\}.$$

No confundan el concepto de la preimagen con el concepto de la función inversa. En la definición de la preimagen la función f es arbitraria, no necesariamente invertible.

1. Consideremos la función $f\colon \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c, d\}$ definida mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$f(1) = a, \qquad f(2) = c, \qquad f(3) = c, \qquad f(4) = c, \qquad f(5) = d.$$

Represente f con flechitas:



2. Calcule $f^{-1}[B]$, si f es la función del ejercicio 1 y $B = \{b, c, d\}$.

Solución. Para cada $x \in X$ determinamos si $f(x)$ pertenece al conjunto B o no.

$$\begin{array}{lcl}
f(1) = a \notin B, & \Longrightarrow & 1 \notin f^{-1}[B] \\
f(2) = c \in B & \Longrightarrow & 2 \in f^{-1}[B] \\
f(3) = & & \\
f(4) = & & \\
f(5) = & &
\end{array}$$

Respuesta: $f^{-1}[\{b, c, d\}] = \{2, \qquad\qquad \}$. □

Definición de la imagen de un conjunto bajo una función. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea A un subconjunto de su dominio, es decir $A \subseteq X$. Entonces la *imagen* del conjunto A bajo la función f se define como el conjunto de todos los puntos $y \in X$ que se pueden obtener como imágenes de los puntos del conjunto A bajo la función f:

$$f[A] \coloneqq \{y \in Y\colon \quad \exists x \in A \quad f(x) = y\}.$$

Notemos que la definición de $f[A]$ usa el cuantificador de existencia $\exists$ y por eso no es trivial.

3. Se considera la función f del ejercicio 1:

$$\begin{array}{lcl}
1\,\bullet & \qquad\qquad\qquad & \bullet\, a \\[1.5em]
2\,\bullet & & \bullet\, b \\[1.5em]
3\,\bullet & & \bullet\, c \\[1.5em]
4\,\bullet & & \bullet\, d \\[1.5em]
5\,\bullet & &
\end{array}$$

Calcule $f[A]$ donde $A = \{1, 2, 3\}$.

Primera solución. Para cada elemento $y \in Y$ determinamos si existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

para $\quad y = a \quad$ encontramos $\quad x = 1 \in A \quad$ tal que $\quad f(x) = a; \qquad \Longrightarrow \qquad a \in f[A].$

para $\quad y = b \quad$ no hay ningún $\quad x \in A \quad$ tal que $\quad f(x) = b; \qquad \Longrightarrow \qquad b \notin f[A].$

para $\quad y = c$

para $\quad y = d$

Respuesta: $f[\{1, 2, 3\}] = \{a, \qquad \}.$ $\square$

Segunda solución. El conjunto $f[A]$ está formado por los puntos $f(x)$, donde $x \in \{1, 2, 3\}$. Así que

$$f[A] = \big\{f(1), f(2), f(3)\big\} = \big\{a, \quad , \quad \big\}.$$

Simplificamos la respuesta quitando las repeticiones:

$$f[A] = \{ \quad , \quad \}.$$

$\square$

4. La función $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d,e\}$ está definida mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$f(1) = b, \qquad f(2) = b, \qquad f(3) = d, \qquad f(4) = d, \quad f(5) = d.$$

Represente f con un dibujo:

$1\,\bullet$	$\bullet\, a$
$2\,\bullet$	$\bullet\, b$
$3\,\bullet$	$\bullet\, c$
$4\,\bullet$	$\bullet\, d$
$5\,\bullet$	$\bullet\, e$

5. Calcule $f^{-1}[\{a,b,c\}]$.

6. Calcule $f^{-1}[\{b\}]$.

7. Sea f la misma función que en el ejercicio 4:

$$\begin{array}{lcr} 1\bullet & \qquad\qquad\qquad & \bullet\, a \\ 2\bullet & & \bullet\, b \\ 3\bullet & & \bullet\, c \\ 4\bullet & & \bullet\, d \\ 5\bullet & & \bullet\, e \end{array}$$

8. Calcule $f[\{3,4,5\}]$ con el primer método.

9. Calcule $f[\{3,4,5\}]$ con el segundo método.

10. Calcule $f[\{3\}]$.