

Coseno y seno del ángulo $\frac{\pi}{6}$

(ejercicios)

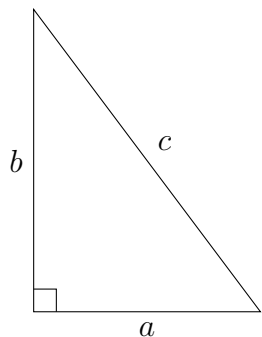
Objetivos. Vamos a recordar el razonamiento geométrico que permite calcular los valores del cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{6}$.

Requisitos. Teorema de Pitágoras, suma de los ángulos de un triángulo, triángulos isósceles, criterio de triángulo isósceles, triángulos iguales.

Vamos a recordar como se deducen los valores del cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{6}$.

Preliminares de geometría

1. Teorema de Pitágoras. Denotemos por a y b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y por c la longitud de su hipotenusa.



Complete la fórmula:

$$a^2 + b^2 = \underbrace{\hspace{2cm}}_?$$

2. Suma de los ángulos de un triángulo. En un triángulo arbitrario ABC ,

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \underbrace{\hspace{2cm}}_?$$

3. Ángulos de un triángulo isósceles. Sea $\triangle ABC$ un triángulo en el cual dos lados son iguales:

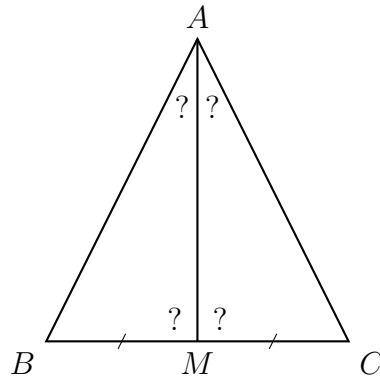
$$AB = AC.$$

Entonces dos ángulos opuestos son iguales:

$$\underbrace{\hspace{2cm}}_? = \underbrace{\hspace{2cm}}_?.$$

Preliminares geométricos: mediana de un triángulo isósceles

4. Sea ABC un triángulo con lados iguales $AB = AC$ y sea AM su mediana. Denotemos el ángulo $\angle BAC$ por α . Calcule los ángulos marcados:



$$\angle BAC = \alpha$$

$$\angle AMB =$$

$$\angle AMC =$$

$$\angle BAM =$$

$$\angle CAM =$$

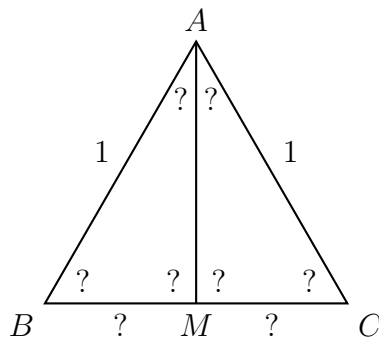
Estudio del triángulo equilátero

En los siguientes dos ejercicios consideramos un triángulo equilátero ABC con

$$AB = AC = BC = 1.$$

Sea AM una de sus medianas.

5. Calcule las longitudes BM y CM . Encuentre los ángulos marcados.



$$BM = CM =$$

$$\angle ABM = \angle ACM =$$

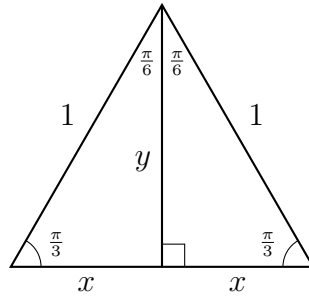
$$\angle AMB = \angle AMC =$$

$$\angle BAM = \angle CAM =$$

6. Aplique el teorema de Pitágoras al triángulo ACM y calcule $x = AM$.

cos y sen de los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$

7. Considere al triángulo en el dibujo. Calcule x . Aplique el teorema de Pitágoras y calcule y .



8. Calcule $\cos \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ y $\sin \frac{\pi}{3}$.

9. Resumen.

$$\sin \frac{\pi}{6} =$$

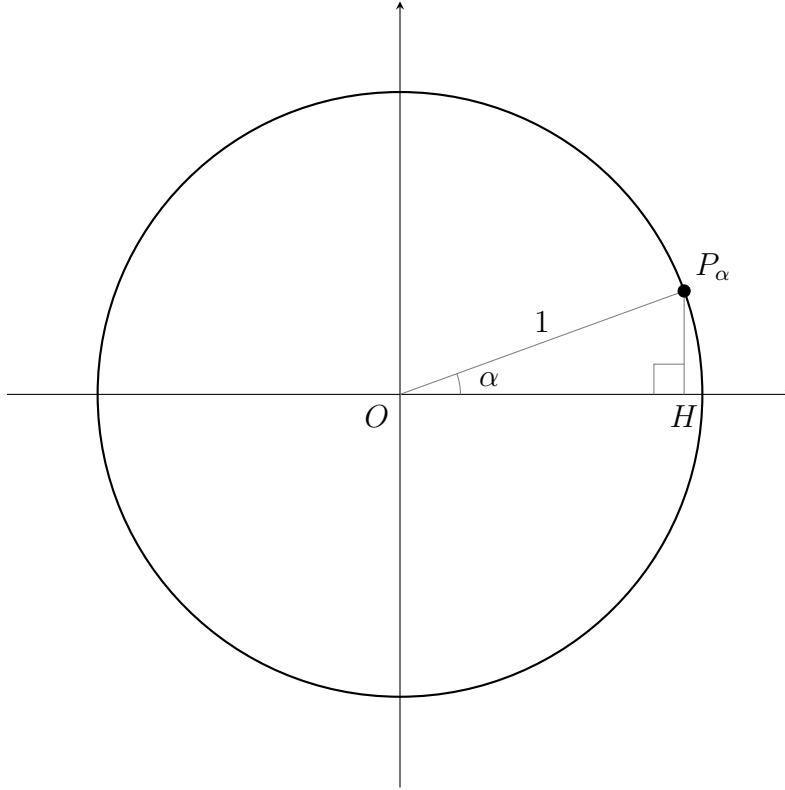
$$\cos \frac{\pi}{6} =$$

$$\sin \frac{\pi}{3} =$$

$$\cos \frac{\pi}{3} =$$

cos y sen en la circunferencia unitaria

10. Escriba las definiciones de cos y sen del ángulo HOP_α del triángulo HOP_α , es decir, exprese $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$ a través de OH y HP_α .



Solución.

$$\cos \alpha =$$

$$\sin \alpha =$$

□

11. Dibuje las correspondencias con flechitas:

$\cos \alpha$

ordenada del punto P_α

$\sin \alpha$

abscisa del punto P_α

cos y sen de los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$

12. Con ayuda de la circunferencia unitaria recuerde los valores de cos y sen en los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$:

$$\cos 0 =$$

$$\text{sen } 0 =$$

$$\cos \frac{\pi}{2} =$$

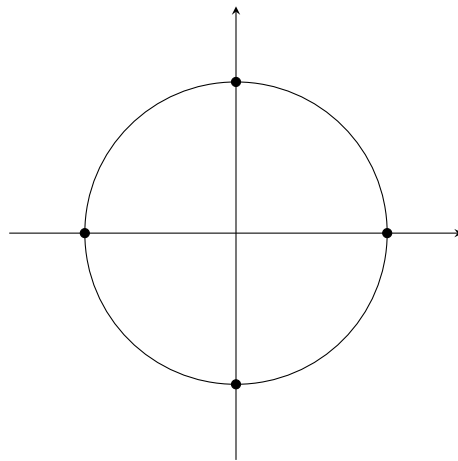
$$\text{sen } \frac{\pi}{2} =$$

$$\cos \pi =$$

$$\text{sen } \pi =$$

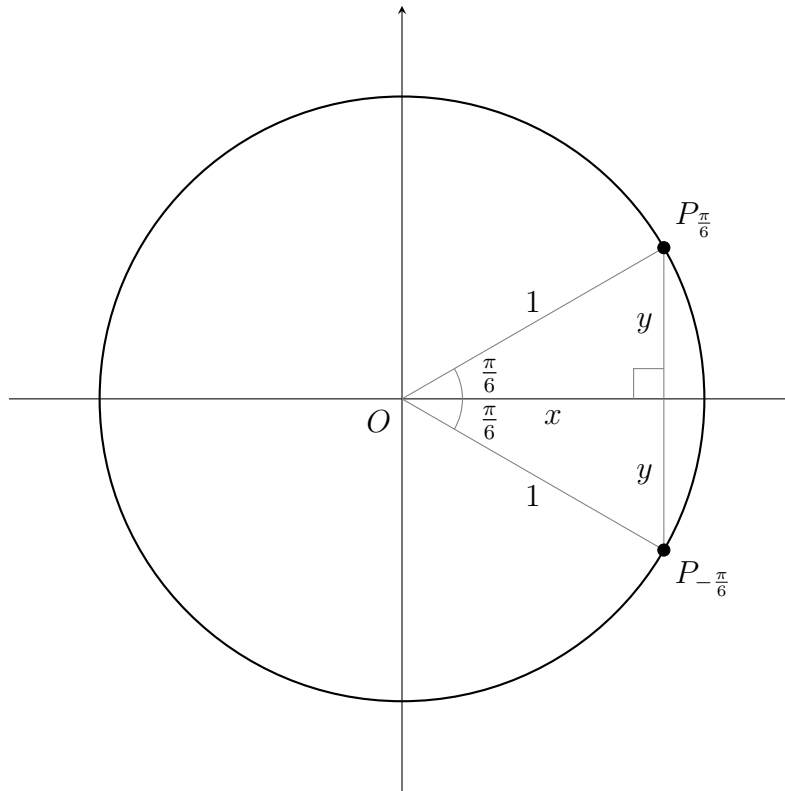
$$\cos \frac{3\pi}{2} =$$

$$\text{sen } \frac{3\pi}{2} =$$



Coseno y seno del ángulo $\frac{\pi}{6}$ en la circunferencia unitaria

13. Encuentre y , luego aplique el teorema de Pitágoras y calcule x .



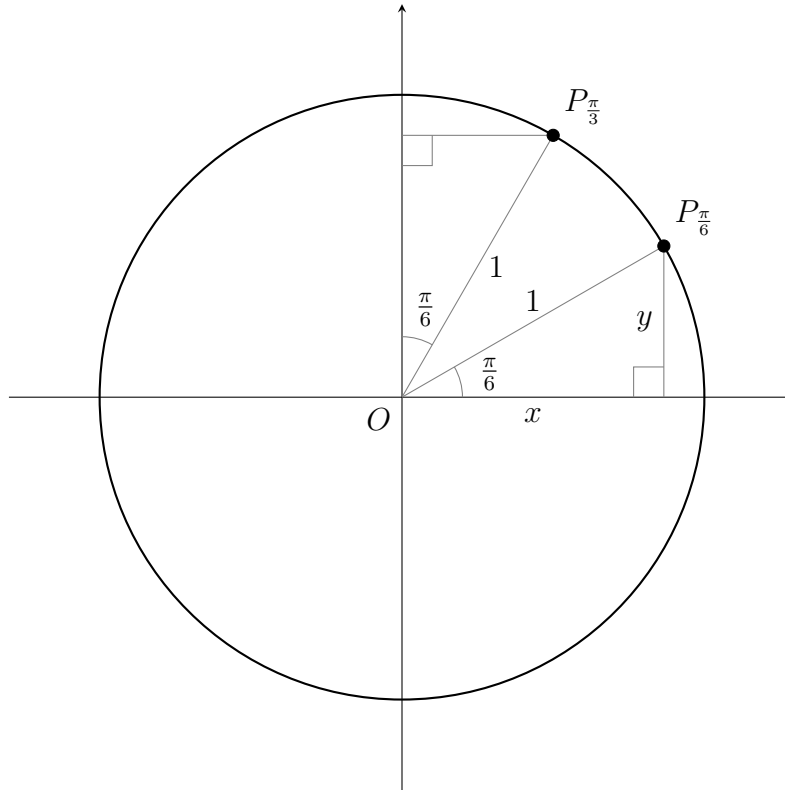
14. Escriba:

$$\cos \frac{\pi}{6} =$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} =$$

Coseno y seno del ángulo $\frac{\pi}{3}$ en la circunferencia unitaria

15. Recuerde los valores $\sin \frac{\pi}{6}$ y $\cos \frac{\pi}{3}$. Encuentre en el dibujo dos triángulos iguales y establezca una relación entre las funciones \cos y \sin de los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$.



16. Escriba:

$$\cos \frac{\pi}{6} =$$

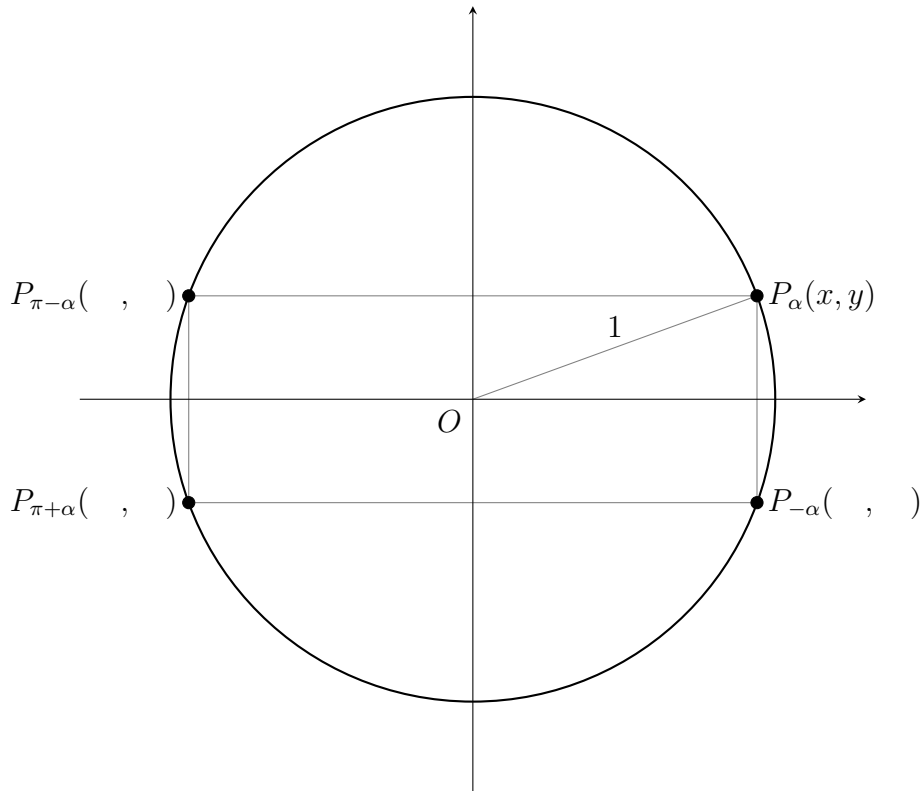
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} =$$

$$\cos \frac{\pi}{3} =$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} =$$

Simetrías en las circunferencia unitaria

17. Sea x e y a las coordenadas del punto P_α . Encuentre las coordenadas de los puntos $P_{-\alpha}$, $P_{\pi-\alpha}$ y $P_{\pi+\alpha}$:



18. Utilizando el dibujo del ejercicio anterior, exprese los valores de \cos y sen en los ángulos $-\alpha$, $\pi - \alpha$ y $\pi + \alpha$ a través de $\cos(\alpha)$ y $\text{sen}(\alpha)$:

$$\cos(-\alpha) = x = \cos(\alpha),$$

$$\text{sen}(-\alpha) =$$

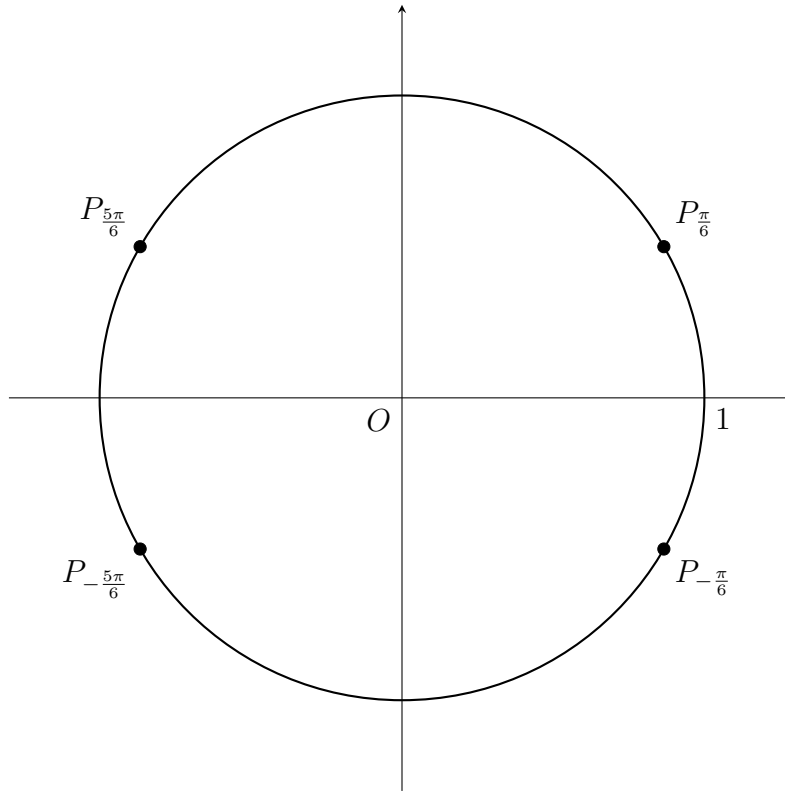
$$\cos(\pi - \alpha) =$$

$$\text{sen}(\pi - \alpha) =$$

$$\cos(\pi + \alpha) =$$

$$\text{sen}(\pi + \alpha) =$$

Coseno y seno de algunos ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{6}$



19. Escriba:

$$\cos \frac{\pi}{6} =$$

$$\text{sen } \frac{\pi}{6} =$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} =$$

$$\text{sen } \frac{5\pi}{6} =$$

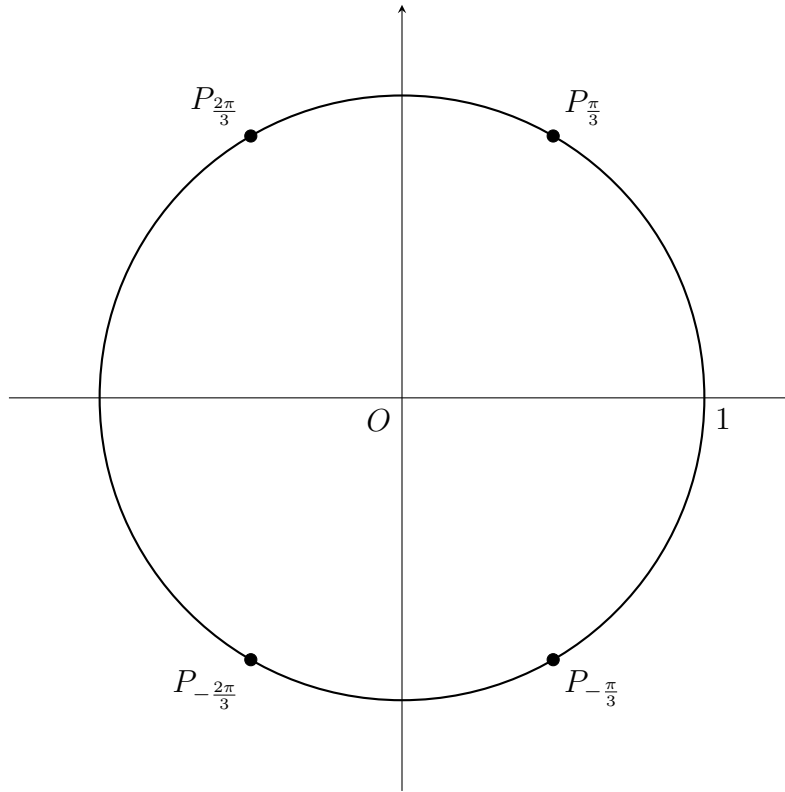
$$\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\text{sen } \left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$\text{sen } \left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$$

Coseno y seno de los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{3}$



20. Escriba:

$$\cos \frac{\pi}{3} =$$

$$\text{sen } \frac{\pi}{3} =$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} =$$

$$\text{sen } \frac{2\pi}{3} =$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\text{sen} \left(-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$\text{sen} \left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$$