cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{4}$

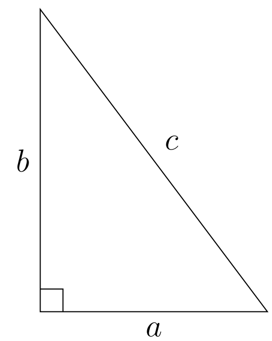
(ejercicios)

Objetivos. Vamos a recordar el razonamiento geométrico que permite calcular los valores del cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Requisitos. Teorema de Pitágoras, suma de los ángulos de un triángulo, triángulos isósceles, criterio de triángulo isósceles.

Preliminares de geometría

1. Teorema de Pitágoras. Denotemos por a y b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y por c la longitud de su hipotenusa.



Complete la fórmula:

$$a^2 + b^2 = \underbrace{\qquad\quad}_{?}$$

2. Suma de los ángulos de un triángulo. En un triángulo arbitrario ABC,

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \underbrace{\qquad\quad}_{?}$$

3. Un criterio del triángulo isósceles. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con dos ángulos iguales:

$$\angle BAC = \angle ABC.$$

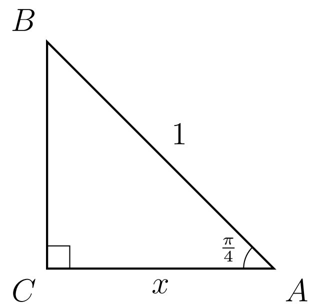
Entonces este triángulo es isósceles. Escriba cuáles de sus lados son iguales:

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

Estudio del triángulo rectángulo con ángulo agudo $\frac{\pi}{4}$

En los siguientes ejercicios se considera un triángulo ABC con

$$\angle ACB = \frac{\pi}{2}, \qquad \angle BAC = \frac{\pi}{4}, \qquad AB = 1.$$



4. En cualquier triángulo, la suma de todos sus ángulos es $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ (en radianes).

En particular, Para el triángulo en consideración,

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

5. Calcule $\angle ABC$.

6. Notamos que en el triángulo ABC los ángulos $\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}$ y $\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}$ son iguales.

Por lo tanto, el triángulo es isósceles, a saber, son iguales sus lados $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ y $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$.

Denotemos su longitud por x:

$$x = \underbrace{\qquad\quad}_{\text{¿cuál lado?}} = \underbrace{\qquad\quad}_{\text{¿cuál lado?}}.$$

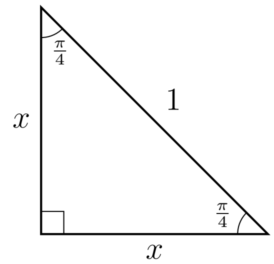
7. Aplique el teorema de Pitágoras al triángulo ABC:

$$\Big(\underbrace{\qquad\quad}_{?}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\qquad\quad}_{?}\Big)^2 = \Big(\underbrace{\qquad\quad}_{?}\Big)^2.$$

8. Simplifique la ecuación anterior y calcule x.

cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{4}$

9. Otra vez aplique el teorema de Pitágoras al triángulo en el dibujo y otra vez calcule x.



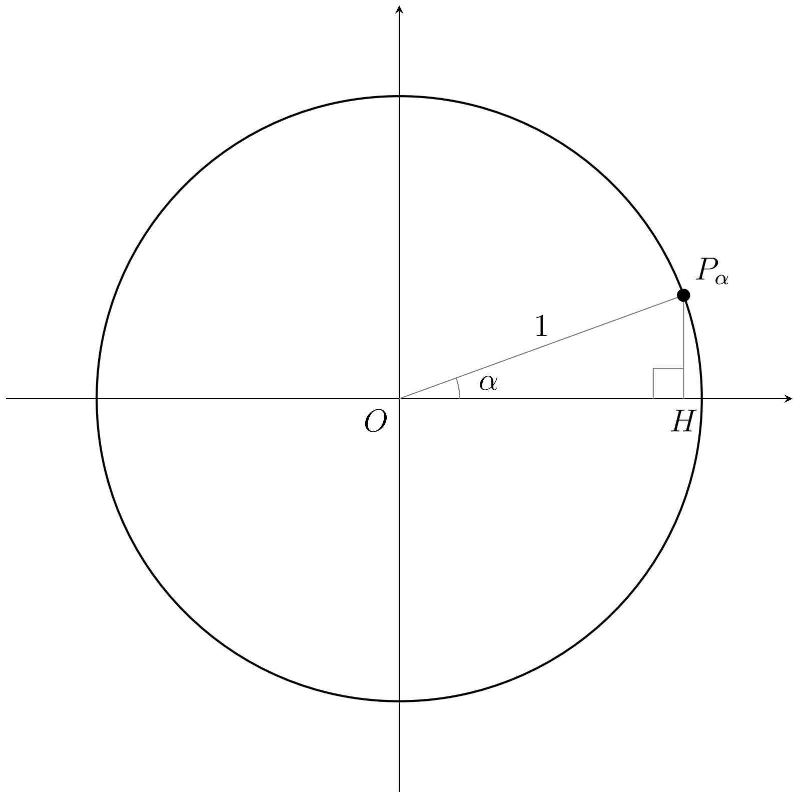
10. Recuerde la definición de coseno y seno (en términos de la hipotenusa y catetos). Calcule $\cos\frac{\pi}{4}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$.

11. Resumen.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

cos y sen en la circunferencia unitaria

12. Escriba las definiciones de cos y sen del ángulo HOP_α del triángulo HOP_α, es decir, exprese $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ a través de OH y HP_α.



$$\cos\alpha =$$

$$\operatorname{sen}\alpha =$$

13. Indique correspondencias correctas con flechitas:

$\cos\alpha$	ordenada del punto P_α
$\operatorname{sen}\alpha$	abscisa del punto P_α

cos y sen de los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ (repaso)

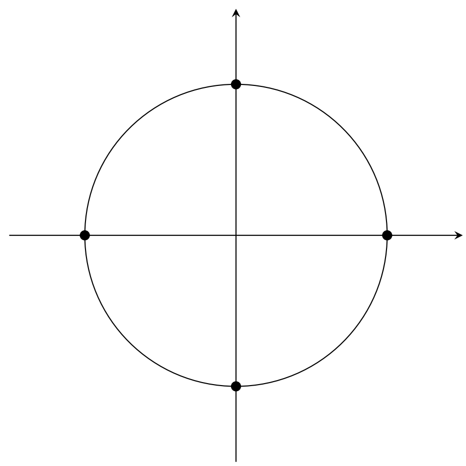
14. Con ayuda de la circunferencia unitaria recuerde los valores de cos y sen en los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$:

$$\cos 0 = \qquad \operatorname{sen} 0 =$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} =$$

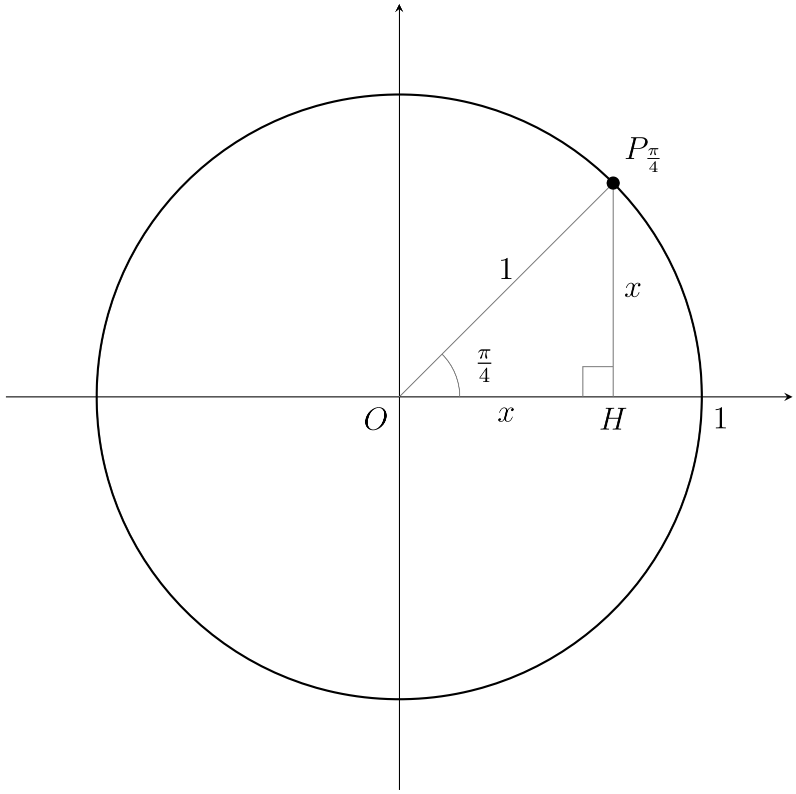
$$\cos\pi = \qquad \operatorname{sen}\pi =$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = \qquad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} =$$



cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{4}$ en la circunferencia unitaria

15. Otra vez aplique el teorema de Pitágoras y otra vez calcule x.



16. Otra vez escriba la respuesta:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \qquad\qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$