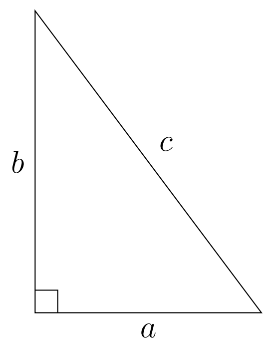
Valores de las funciones trigonométricas en los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{4}$ y de $\frac{\pi}{6}$

Vamos a recordar como se deducen los valores del cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Preliminares de geometría

1. Teorema de Pitágoras. Denotemos por a y b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y por c la longitud de su hipotenusa.



Complemente la fórmula:

$$a^2 + b^2 = \underbrace{\qquad}_{?}$$

2. Suma de los ángulos de un triángulo. En un triángulo arbitrario ABC,

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \underbrace{\qquad}_{?}$$

3. Un criterio del triángulo isósceles. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con dos ángulos iguales:

$$\angle BAC = \angle ABC.$$

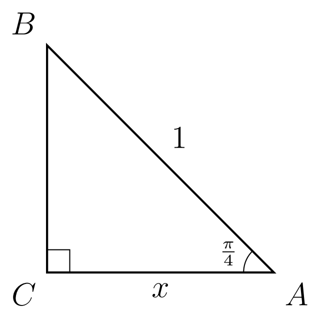
Entonces este triángulo es isósceles. Escriba cuáles de sus lados son iguales:

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

Estudio del triángulo rectángulo con ángulo agudo $\frac{\pi}{4}$

En los siguientes ejercicios se considera un triángulo ABC con

$$\angle ACB = \frac{\pi}{2}, \qquad \angle BAC = \frac{\pi}{4}, \qquad AB = 1.$$



4. Calcule $\angle ABC$.

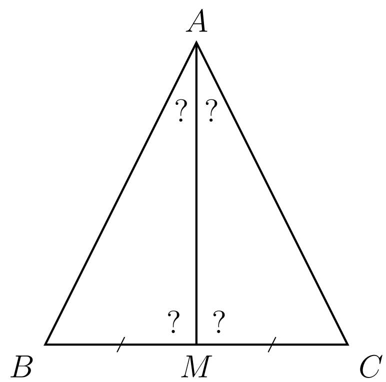
5. Demuestre que $AC = BC$. Vamos a denotar esta longitud por x.

6. Aplique el teorema de Pitágoras al triángulo ABC.

7. Calcule x.

Preliminares geométricos: mediana de un triángulo isósceles

8. Sea ABC un triángulo con lados iguales $AB = AC$ y sea AM su mediana. Denotemos el ángulo $\angle BAC$ por α. Calcule los ángulos marcados:



$\angle BAC = \alpha$

$\angle AMB =$

$\angle AMC =$

$\angle BAM =$

$\angle CAM =$

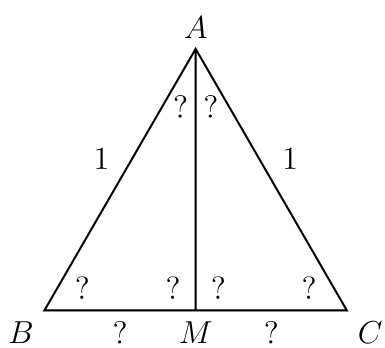
Estudio del triángulo equilátero

En los siguientes dos ejercicios consideramos un triángulo equilátero ABC con

$$AB = AC = BC = 1.$$

Sea AM una de sus medianas.

9. Calcule las longitudes BM y CM. Encuentre los ángulos marcados.



$BM = CM =$

$\angle ABM = \angle ACM =$

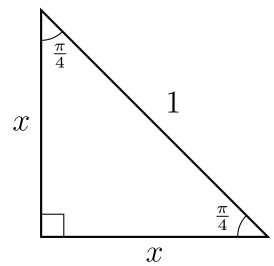
$\angle AMB = \angle AMC =$

$\angle BAM = \angle CAM =$

10. Aplique el teorema de Pitágoras al triángulo ACM y calcule $x = AM$.

cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{4}$

11. Aplique el teorema de Pitágoras al triángulo en el dibujo y calcule x.



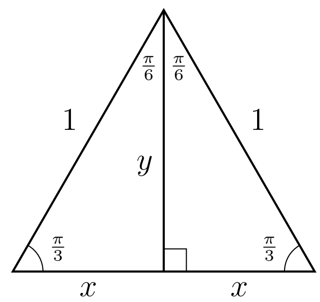
12. Calcule $\cos\frac{\pi}{4}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$.

13. Resumen.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

cos y sen de los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$

14. Considere al triángulo en el dibujo. Calcule x. Aplique el teorema de Pitágoras y calcule y.



15. Calcule $\cos\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$.

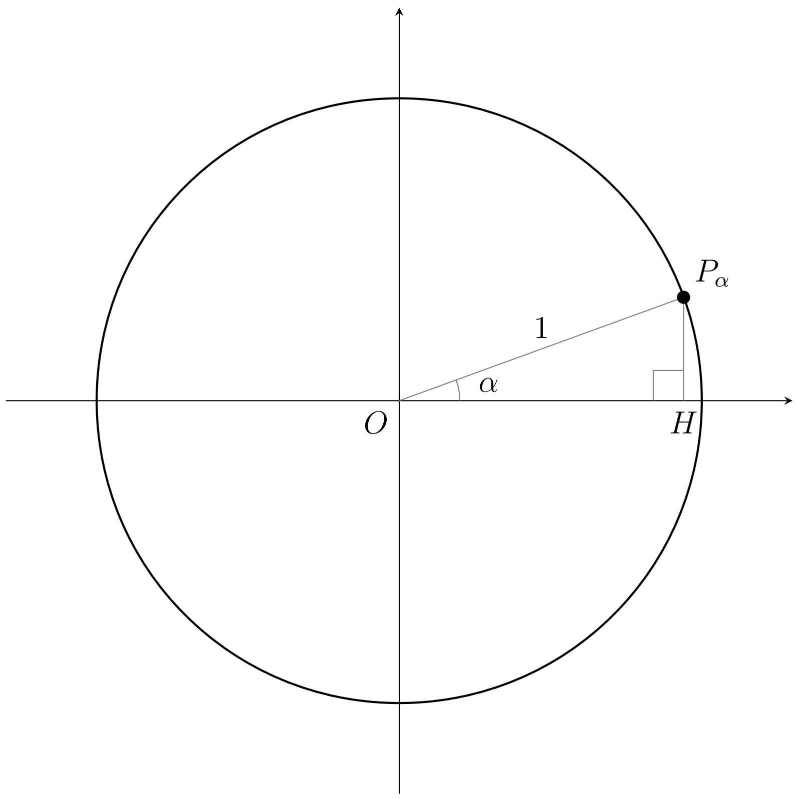
16. Resumen.

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \qquad\qquad \cos\frac{\pi}{6} =$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \qquad\qquad \cos\frac{\pi}{3} =$$

cos y sen en la circunferencia unitaria

17. Escriba las definiciones de cos y sen del ángulo HOP_α del triángulo HOP_α, es decir, exprese $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ a través de OH y HP_α.



Solución.

$$\cos\alpha =$$

$$\operatorname{sen}\alpha =$$

□

18. Dibuje las correspondencias con flechitas:

$\cos\alpha$	ordenada del punto P_α
$\operatorname{sen}\alpha$	abscisa del punto P_α

cos y sen de los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$

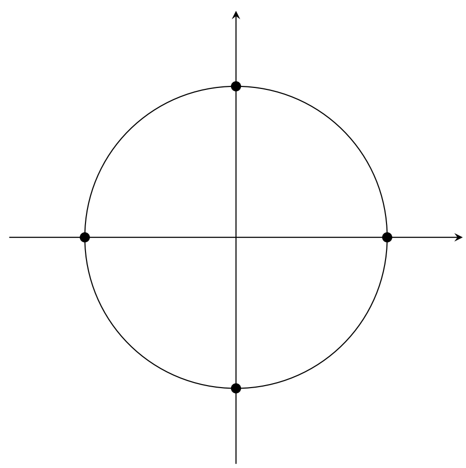
19. Con ayuda de la circunferencia unitaria recuerde los valores de cos y sen en los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$:

$$\cos 0 = \qquad\qquad \operatorname{sen} 0 =$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} =$$

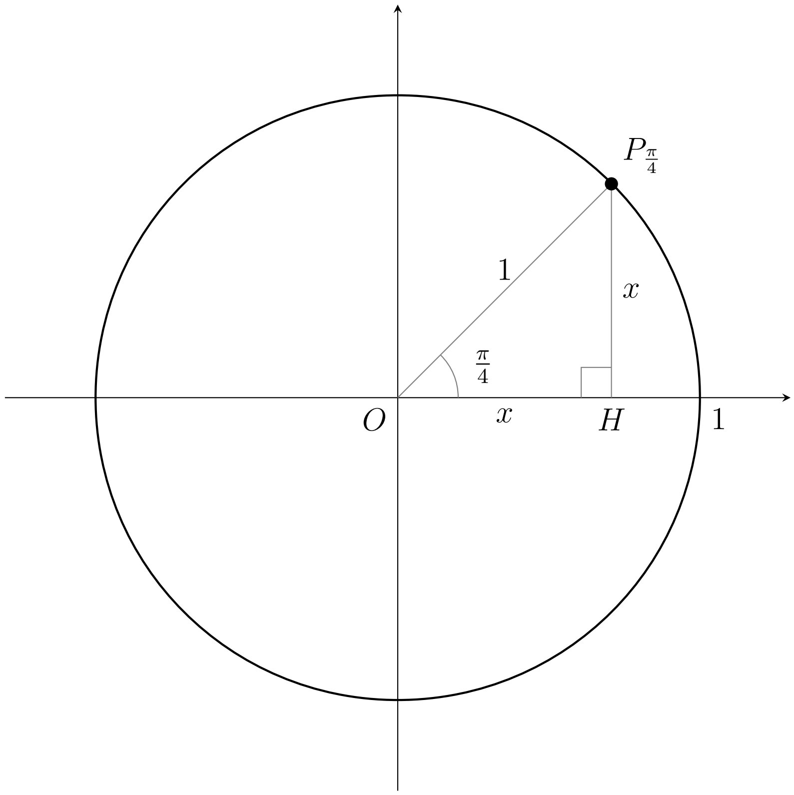
$$\cos\pi = \qquad\qquad \operatorname{sen}\pi =$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} =$$



cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{4}$ en la circunferencia unitaria

20. Aplique el teorema de Pitágoras y calcule x.

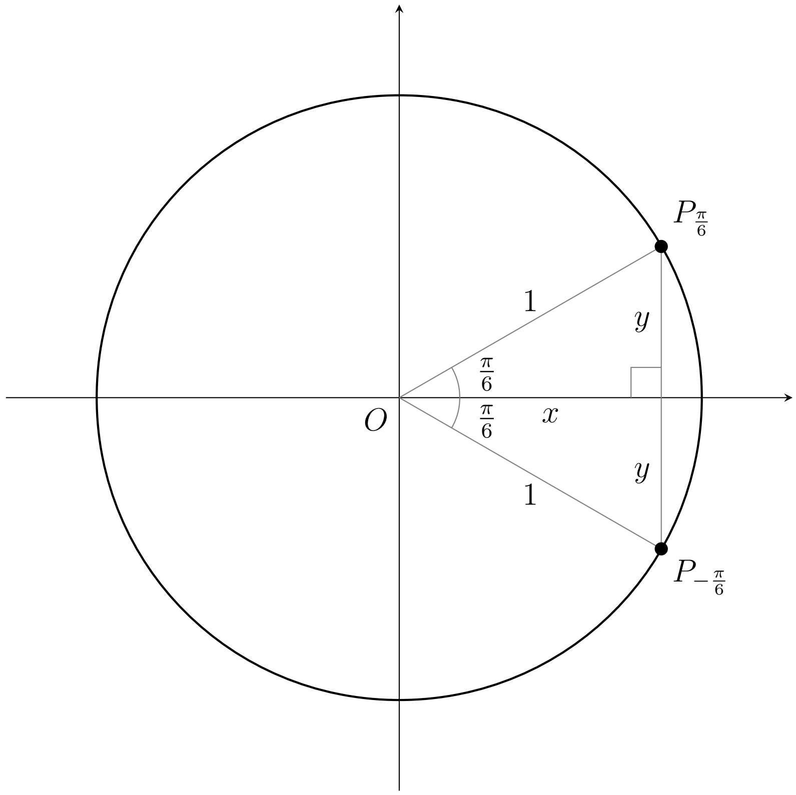


21. Escriba:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{6}$ en la circunferencia unitaria

22. Encuentre y, luego aplique el teorema de Pitágoras y calcule x.

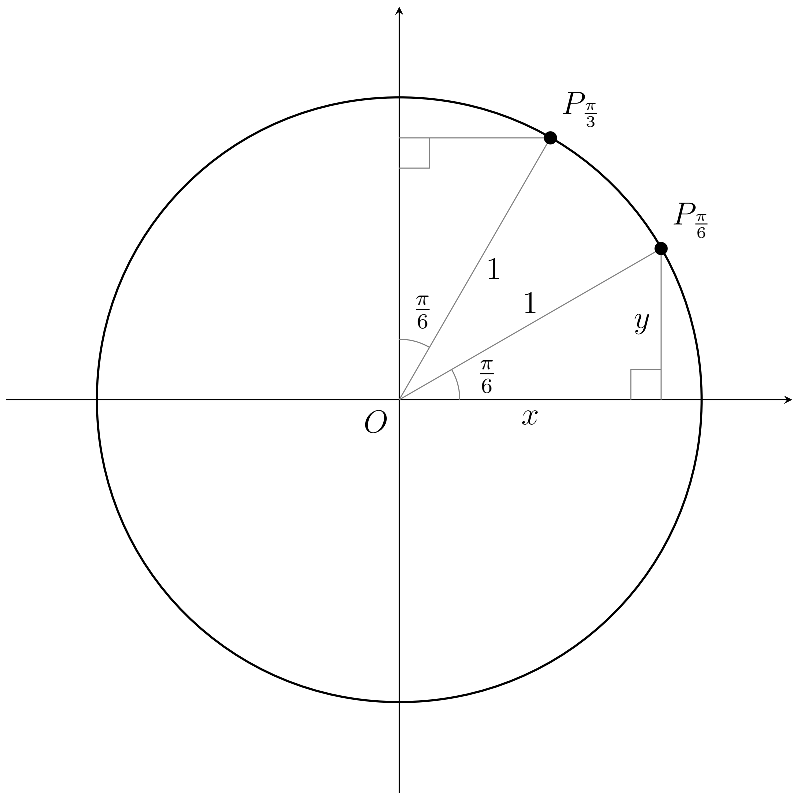


23. Escriba:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} =$$

cos y sen del ángulo $\frac{\pi}{3}$ en la circunferencia unitaria

24. Recuerde los valores sen $\frac{\pi}{6}$ y cos $\frac{\pi}{3}$. Encuentre en el dibujo dos triángulos iguales y establezca una relación entre las funciones cos y sen de los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$.



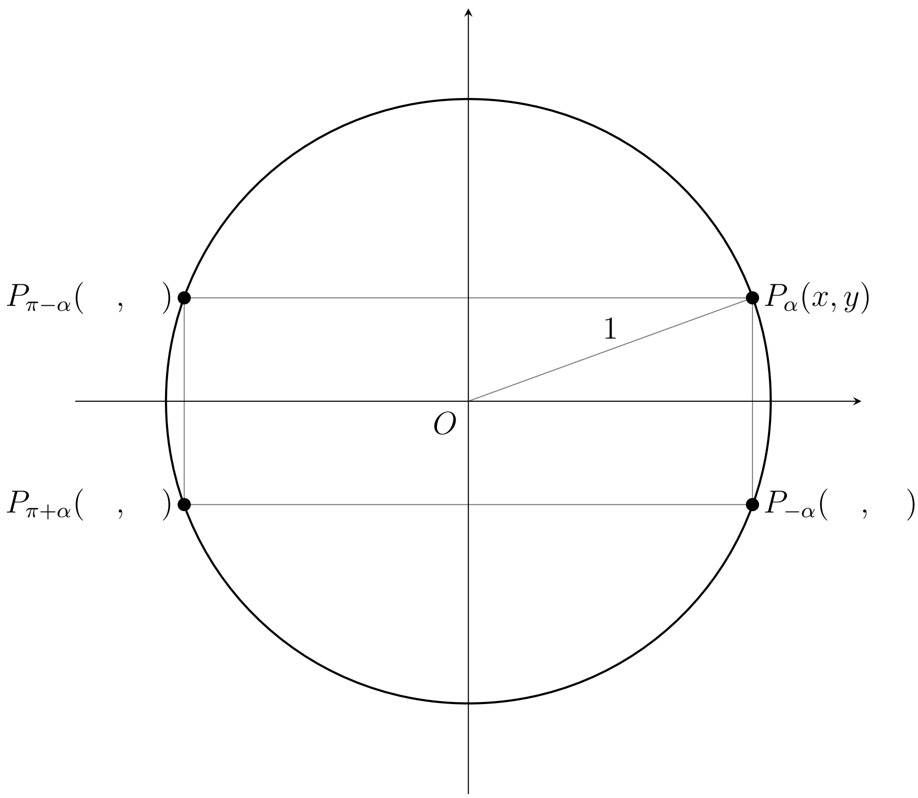
25. Escriba:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} =$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$$

Simetrías en las circunferencia unitaria

26. Sea x e y a las coordenadas del punto P_α. Encuentre las coordenadas de los puntos $P_{-\alpha}$, $P_{\pi-\alpha}$ y $P_{\pi+\alpha}$:



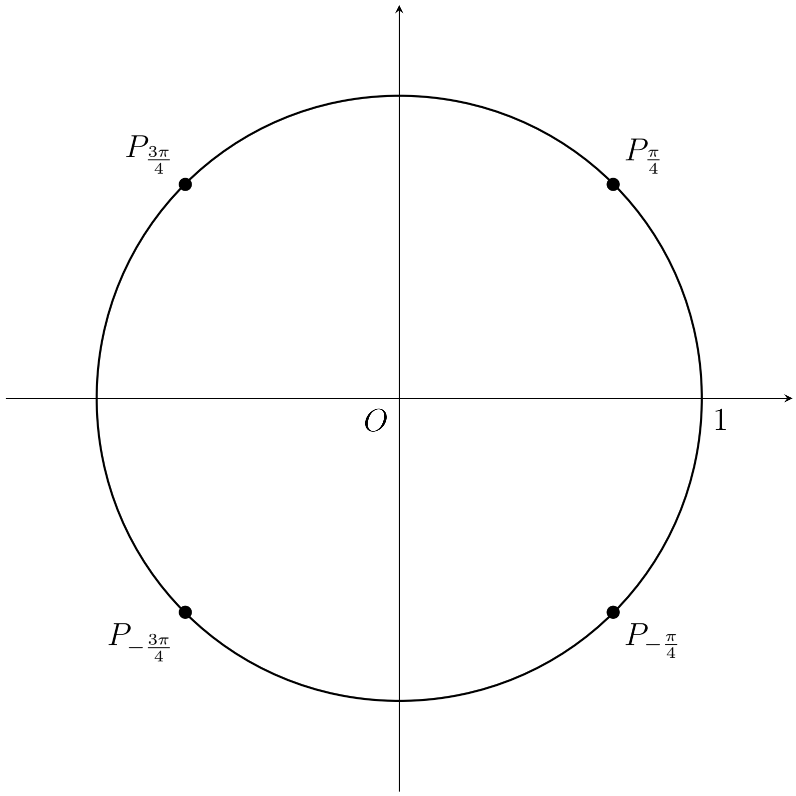
27. Utilizando el dibujo del ejercicio anterior, exprese los valores de cos y sen en los ángulos $-\alpha$, $\pi-\alpha$ y $\pi+\alpha$ a través de $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$:

$$\cos(-\alpha) = x = \cos(\alpha), \qquad \operatorname{sen}(-\alpha) =$$

$$\cos(\pi-\alpha) = \qquad \operatorname{sen}(\pi-\alpha) =$$

$$\cos(\pi+\alpha) = \qquad \operatorname{sen}(\pi+\alpha) =$$

cos y sen de los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{4}$



28. Escriba:

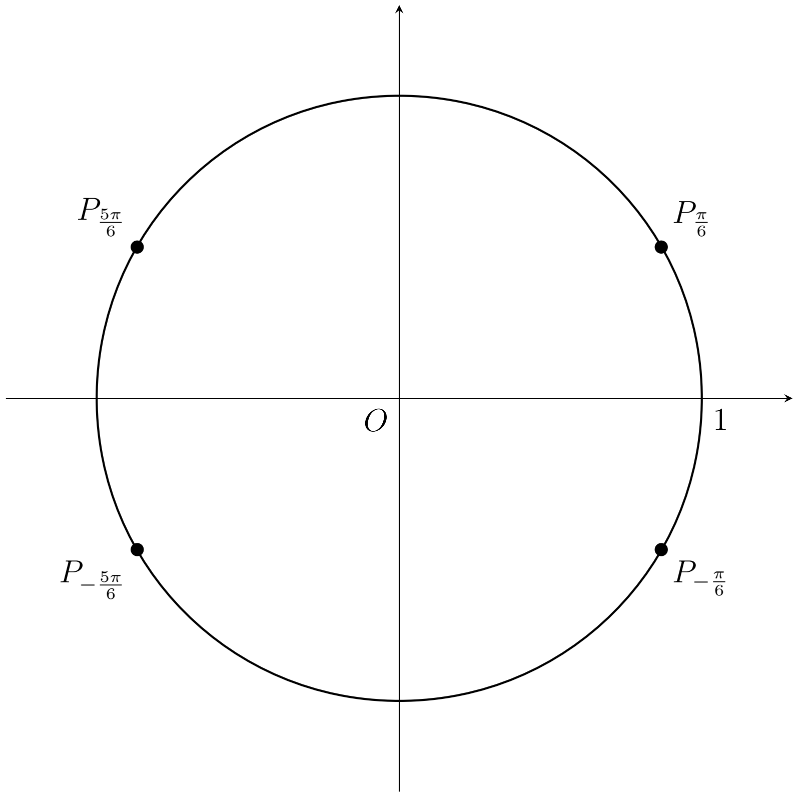
$$\cos\frac{\pi}{4} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} =$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \qquad\qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \qquad\qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) =$$

cos y sen de algunos ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{6}$



29. Escriba:

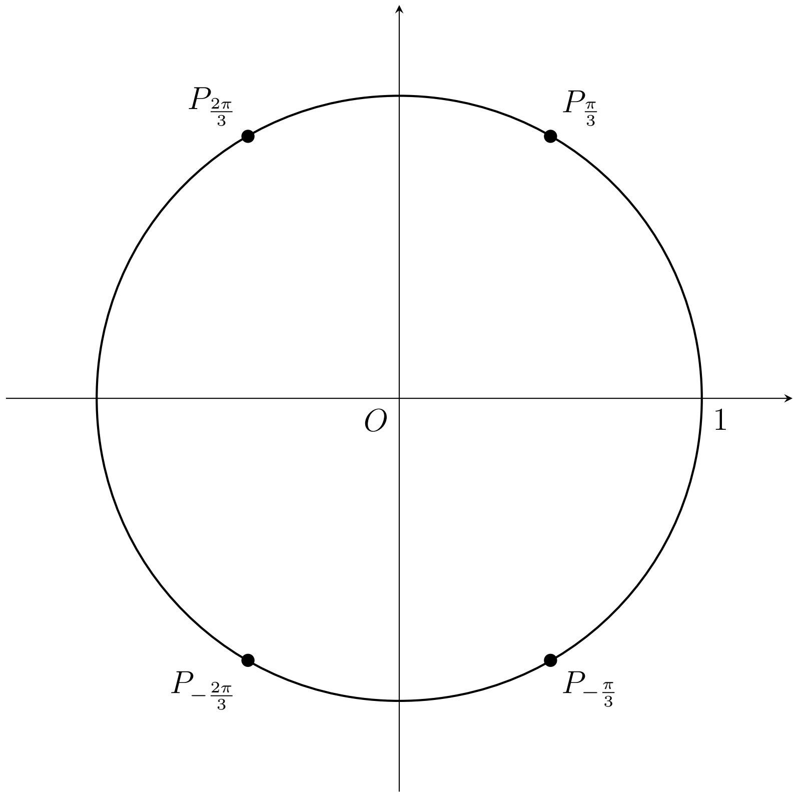
$$\cos\frac{\pi}{6} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} =$$

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} =$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \qquad\qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \qquad\qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$$

cos y sen de los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{3}$



30. Escriba:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} =$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \qquad\qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \qquad\qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$$