Construcción de números que cumplan con ciertas desigualdades

Objetivos. En muchas demostraciones de cálculo es importante saber construir números que satisfagan ciertas desigualdades. Intentaremos aprender esta arte con ejemplos sencillos.

Requisitos. Desigualdades y operaciones aritméticas, comparación de números.

Ejemplo. Construya (elija, encuentre) un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 7$.

Primera solución. $x = 9$. □

Segunda solución. $x = 7\frac{4}{5}$. □

Tercera solución. $x = 7 + t$, donde t es un número positivo arbitrario. □

Aunque la tercera solución es correcta y de hecho es la solución general del problema, en todos los ejercicios de esta lista se pide dar una solución que parezca a la primera o segunda, es decir, una solución particular y concreta que no involucre ningunas variables adicionales.

1. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < 3$.

2. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > -3 \quad \wedge \quad x < 4$.

3. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0 \quad \wedge \quad x < \frac{1}{3}$.

4. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0 \quad \wedge \quad (1 + x)^2 < 1.1$.

5. Construya $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x > 0 \quad \wedge \quad y > 0 \quad \wedge \quad x + y = 6$.

6. Construya $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $0 < x < 4.2 \quad \wedge \quad 0 < y < 3.5 \quad \wedge \quad x + y = 7.3$.

Ejercicios con parámetros

En los siguientes ejercicios hay que construir números que satisfagan ciertas desigualdades, *sin introducir variables adicionales*, *sin dividir en casos* y usando *solamente operaciones aritméticas.*

Ejemplo. Sea $a > 0$. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\quad x > a \quad \wedge \quad x > 4.$

Primera solución. Si $a > 4$, entonces ponemos $x = a+1$. Si $a \leq 4$, entonces ponemos $x = 5$. $\square$

La primera solución es demasiado complicada porque la respuesta está dividida en dos casos.

Segunda solución. Ponemos $x = \max\{a, 4\} + t$, donde $t > 0$. $\square$

La segunda solución es demasiado complicada porque usa la función máx y además introduce una variable adicional t.

Tercera solución. Ponemos $x = a + 4$. Entonces $x > a$ y $a > 4$. $\square$

La tercera solución satisface todos los requerimientos: usa solamente operaciones aritméticas, no introduce ningunas variables adicionales y no divide la repuesta en varios casos.

7. Sea $a \in \mathbb{R}$. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\quad x > a.$

8. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\quad x > 0 \quad \wedge \quad x < a.$

9. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\quad x > 0 \quad \wedge \quad x < a \quad \wedge \quad x < 1.$

10. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Construya $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $\quad x > 0 \quad \wedge \quad y > 0 \quad \wedge \quad x + y = a.$

11. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\quad x > 0 \quad \wedge \quad (1 + x)^2 < 1 + a.$

12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\quad a < x \quad \wedge \quad x < b.$

13. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Construya un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\quad x > 0 \quad \wedge \quad x < a \quad \wedge \quad x < b.$

14. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a+b > c$. Construya $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $\quad x < a \quad \wedge \quad x < b \quad \wedge \quad x+y = c.$