# Fórmulas de Euler e identidades trigonométricas

**Objetivos.** Deducir algunas identidades trigonométricas usando la fórmula de Euler y la propiedad principal de la función exponencial.

**Requisitos.** Números complejos, definición de la función exponencial a través de una serie, propiedad principal de la función exponencial.

## Definición de la función exp y su propiedad principal (repaso)

**1.** Escriba la definición de $\exp(z)$ como una serie:

$$\exp(z) \coloneqq 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \qquad + \qquad + \quad \ldots \tag{1}$$

**2.** Escriba la definición de la función $\exp(z)$ usando el símbolo $\sum$:

$$\exp(z) \coloneqq \sum_{k=}$$

**Nota.** Es posible definir $a^x$ para todo $a > 0$, $a \neq 1$, y todo $x$ real, empezando con potencias racionales y luego aproximando los números reales con racionales. Luego es posible demostrar que para todo $x$ real se cumple la igualdad $\exp(x) = e^x$, donde $e = \exp(1) \approx 2.71828$. Por eso para todo $z$ complejo en vez de $\exp(z)$ se usa también la notación $e^z$.

**3. Propiedad principal de la función exponencial.** Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\boxed{\exp(z_1)\exp(z_2) = \qquad\qquad}$$

Esta propiedad se puede demostrar usando transformaciones de las series y aplicando la fórmula de la potencia del binomio. No lo vamos a hacer aquí.

**4.** Usando la definición (1) calcule $\exp(0)$.

**5.** Calcule: $\quad \exp(z)\exp(-z) =$

**6.** Calcule: $\quad \dfrac{1}{\exp(z)} =$

## Fórmulas de Euler

**Definición de cos y sen a través de exp.**
Las funciones $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\operatorname{sen}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se pueden definir de la siguiente manera:

$$\boxed{\cos(\varphi) := \frac{\exp(\mathrm{i}\,\varphi) + \exp(-\mathrm{i}\,\varphi)}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\varphi) := \frac{\exp(\mathrm{i}\,\varphi) - \exp(-\mathrm{i}\,\varphi)}{2\,\mathrm{i}}.}$$

**7.** Exprese $\exp(\mathrm{i}\,\varphi) + \exp(-\mathrm{i}\,\varphi)$ a través de $\cos(\varphi)$:

$$\exp(\mathrm{i}\,\varphi) + \exp(-\mathrm{i}\,\varphi) =$$

**8.** Exprese $\exp(\mathrm{i}\,\varphi) - \exp(-\mathrm{i}\,\varphi)$ a través de $\operatorname{sen}(\varphi)$:

$$\exp(\mathrm{i}\,\varphi) - \exp(-\mathrm{i}\,\varphi) =$$

**9.** Sume las igualdades de los ejercicios anteriores:

$$2\exp(\mathrm{i}\,\varphi) =$$

Exprese $\exp(\mathrm{i}\,\varphi)$ a través de $\cos(\varphi)$ y $\operatorname{sen}(\varphi)$:

$$\boxed{\exp(\mathrm{i}\,\varphi) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

**10.** Reste las igualdades de los ejercicios 7 y 8:

$$2\exp(-\mathrm{i}\,\varphi) =$$

Exprese $\exp(-\mathrm{i}\,\varphi)$ a través de $\cos(\varphi)$ y $\operatorname{sen}(\varphi)$:

$$\boxed{\exp(-\mathrm{i}\,\varphi) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

## Propiedades de paridad de cos y sen

**Ejemplo.** $\operatorname{sen}(-\varphi) = \dfrac{e^{\mathrm{i}(-\varphi)} - e^{-\mathrm{i}(-\varphi)}}{2\,\mathrm{i}} = \dfrac{e^{-\mathrm{i}\,\varphi} - e^{\mathrm{i}\,\varphi}}{2\,\mathrm{i}} = -\dfrac{e^{\mathrm{i}\,\varphi} - e^{-\mathrm{i}\,\varphi}}{2\,\mathrm{i}} = -\operatorname{sen}(\varphi).$

**11.** Calcule: $\cos(-\varphi) =$

Exprese $\cos(-\varphi)$ a través de $\cos(\varphi)$ y $\operatorname{sen}(-\varphi)$ a través de $\operatorname{sen}(\varphi)$:

**12.** $\cos(-\varphi) =$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{sen}(-\varphi) =$

## Deducción de las identidades para los productos $\cos(\alpha)\cos(\beta)$, $\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

Usando las fórmulas de Euler y la propiedad principal de la función exponencial calcule los siguientes productos y expréselos a través de $\cos(\alpha \pm \beta)$ o $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)$:

**13.** $2\cos(\alpha)\cos(\beta) =$

**14.** $2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) =$

**15.** $2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) =$

**16.** Resumen:

$2\cos(\alpha)\cos(\beta) =$

$2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) =$

$2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) =$

## Deducción de las identidades para $\cos(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

Escribamos las identidades obtenidas en la sección anterior de otra manera:

**17.** $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) =$

**18.** $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) =$

**19.** $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) =$

Intercambiamos los papeles de $\alpha$ y $\beta$ en la identidad anterior:

**20.** $\operatorname{sen}(\beta + \alpha) + \operatorname{sen}(\beta - \alpha) =$

**21.** Tomando en cuenta que $\operatorname{sen}(-\varphi) =$ ,
establezca una relación entre $\operatorname{sen}(\beta - \alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$:

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) =$$

**22.** Sumando las igualdades anteriores deduzca las identidades para $\cos(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$:

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$$