Desigualdad de Bernoulli

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Bernoulli y conocer algunas de sus aplicaciones.

Requisitos. Demostraciones por inducción, propiedades de desigualdades.

Preliminares

1. Multiplicación de una desigualdad por un número positivo. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c > 0$. Compare ac con bc:

$$ac \qquad bc.$$

2. Definición recursiva de las potencias de un número.

$$x^0 = \qquad , \qquad\qquad x^{n+1} = \qquad\qquad .$$

3. Propiedad transitiva del orden. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $b \leq c$. Compare a con c:

$$a \qquad c.$$

Desigualdad de Bernoulli y su demostración

4. Sea $a \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Demostración. Para $n = 1$ la desigualdad toma la siguiente forma:

Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Supongamos que la desigualdad es válida para n y la demostremos para $n + 1$:

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &= \\ &\leq \\ \\ \\ &\leq 1 + (n + 1)a.\end{aligned}$$

□

Aplicaciones de la desigualdad de Bernoulli

Ejemplo. Demostrar que existe un $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$3^n \geq Cn.$$

Solución. Escribimos 3^n como $(1+2)^n$ y aplicamos la desigualdad de Bernoulli:

$$(1+2)^n \geq 1 + 2n \geq 2n.$$

La desigualdad requerida se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ con $C = 2$. $\square$

5. Demuestre que existe un $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1.5^n \geq Cn.$$

Ejemplo. Demostrar que existe un $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$3^n \geq Cn^5.$$

Solución. Primero escribimos 3 como

$$3 = \left(\sqrt[5]{3}\right)^5 = (1+a)^5,$$

donde $b = \sqrt[5]{3} - 1$. Como $3 > 1$, tenemos que $\sqrt[5]{3} > 1$ y $a > 0$. Ahora aplicamos la desigualdad de Bernoulli:

$$3^n = \left((1+b)^5\right)^n = ((1+b)^n)^5 \geq \left(1+nb\right)^5 > \left(nb\right)^5 = b^5 n^5.$$

La desigualdad requerida está probada para todo $n \in \mathbb{N}$ con $C = b^5 = \left(\sqrt[5]{3} - 1\right)^5$. $\square$

6. Encuentre un $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \geq Cn^3.$$

7. Sea $a > 1$ y sea $p > 0$. Encuentre un $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a^n \geq Cn^p.$$