Ejemplos de espacios vectoriales. Contraejemplos

Objetivos. Conocer los ejemplos más importantes de espacios vectoriales.

Requisitos. Definición del espacio vectorial, operaciones lineales en $\mathbb{F}^n$ y sus propiedades, operaciones lineales en $V^2(O)$ y sus propiedades, operaciones lineales en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sus propiedades.

Espacios vectoriales "aritméticos"

1. $\mathbb{R}^n$ es un EV real.

2. $\mathbb{C}^n$ es un EV complejo.

3. En general, $\mathbb{F}^n$ es un EV/$\mathbb{F}$ (espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$).

4. $\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}$ es un EV/$\mathbb{F}$.

5. $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ es un EV/$\mathbb{R}$ si definimos la multiplicación $\cdot_{\mathbb{R}}$ solamente por números reales:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \qquad \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \ldots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}.$$

6. $\mathbb{R}$ se puede considerar como un EV sobre el campo $\mathbb{Q}$.

7. Espacio vectorial nulo. Sea V un conjunto unipuntual: $V = \{P\}$ y sea $\mathbb{F}$ un campo. Definamos las operaciones lineales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P + P &:= P, \\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad \lambda P &:= P. \end{aligned}$$

Es fácil ver que se cumples todos los axiomas de espacio vectorial. En particular, el elemento P hace papel del vector cero en este espacio.

8. En este ejemplo denotemos por V al conjunto de los pares ordenados de números reales positivos:

$$V = (0, +\infty) \times (0, +\infty) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}.$$

Definamos la operación "suma":

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix}$$

y la operación "producto por números reales":

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{bmatrix}.$$

Entonces V es un espacio vectorial real. Note que en este espacio el vector cero (el elemento neutro aditivo) es distinto de $\mathbf{0}_2$, y para todo $a \in V$ el vector inverso aditivo $\ominus a$ es distinto del vector opuesto común $-a$:

$$\mathbf{0}_V \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ominus a \neq \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}.$$

Espacios vectoriales "geométricos"

9. $V^2(O)$ (espacio de los segmentos dirigidos en el plano con el punto inicial O) es un EV real. Análogamente, $V^1(O)$ y $V^3(O)$ (en la recta y en el espacio) son espacios vectoriales reales.

10. V^2 (espacio de los vectores libres en el plano) es un EV real. Análogamente, V^1 (vectores libres en la recta) y V^3 (vectores libres en el espacio) son espacios vectoriales reales.

Polinomios

11. Denotemos por $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ al conjunto de todos los polinomios de una variable con coeficientes pertenecientes al campo $\mathbb{F}$. $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ es un EV/$\mathbb{F}$.

Repaso: grado de los polinomios. El grado de polinomios cumple las siguientes propiedades:

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g), \quad \deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g)), \quad \deg(\lambda f) \leq \deg(f).$$

Para el polinomio cero 0 se pone $\deg(0) = -\infty$.

12. $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ consiste en los polinomios cuyos grados son $\leq n$. Es un EV/$\mathbb{F}$.

Matrices

13. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Matrices del tamaño $m \times n$ cuyas entradas pertenecen al campo $\mathbb{F}$.

Espacios de funciones

Conjunto de todas las funciones con dominio y contradominio dados. Sean X, Y conjuntos. El conjunto de todas las funciones $f\colon X \to Y$ se denota por Y^X.

14. Sea E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea X un conjunto. Consideremos el conjunto $V = E^X$ con las siguientes operaciones lineales. Si $f, g \in E^X$, es decir $f\colon X \to E$ y $g\colon X \to E$, entonces la función $f + g\colon X \to E$ se define mediante la regla:

$$\forall x \in X \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $f \in E^X$, es decir $f\colon X \to E$, entonces la función $\lambda f\colon X \to E$ se define mediante la regla:

$$\forall x \in X \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

El conjunto $V = E^X$ dotado con estas operaciones lineales es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$.

15. Ejercicio. Pruebe algunos de los axiomas de espacio vectorial para el espacio E^X del ejemplo anterior.

16. $C([a,b], \mathbb{R})$. Espacio de las funciones continuas $[a,b] \to \mathbb{R}$ con las operaciones lineales puntuales:

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

Es un espacio vectorial real.

17. $C^k([a,b], \mathbb{R})$. Espacio de funciones k veces continuamente diferenciables $[a,b] \to \mathbb{R}$. Es un EV/$\mathbb{R}$.

Contraejemplos: cuando los resultados de las operaciones no siempre están en el conjunto inicial

En otras palabras, cuando las operaciones *llevan afuera*) del conjunto inicial. Mostrar que cada uno de los siguientes conjuntos (con las operaciones comunes) *no es* espacio vectorial real:

18. Polinomios de grado n con coeficientes reales.

19. Polinomios con coeficientes no negativos.

20. Conjunto de las funciones $f \in C[a, b]$ tales que $|f(t)| \leq 1$ para todos $t \in [0, 1]$.

Contraejemplos: cuando las operaciones no cumplen con algunos de los axiomas

Mostrar que los siguientes conjuntos *no son* espacios vectoriales reales. En cada uno de los ejemplos aclarar, cuales axiomas de espacio vectorial no se cumplen, y dar contraejemplos concretos. Por $+$ y $\cdot$ denotamos las operaciones lineales comunes, y los signos $\oplus$ y $\odot$ usamos para operaciones no comunes.

21. $V = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus, \cdot)$, donde

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix}.$$

22. $V = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus, \cdot)$, donde

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{bmatrix}.$$

23. $V = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$, donde $0 \odot a := \mathbf{0}_2$ y para todo $\lambda \neq 0$

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} x_1 \\ \frac{1}{\lambda} x_2 \end{bmatrix}.$$

24. $V = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$, donde

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

25. $V = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$, donde

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2\lambda x_1 \\ 2\lambda x_2 \end{bmatrix}.$$